مذكرة

الجبر: الدوال الحقيقية

الصف الثانى الثانوى

القسم الأدبى

الفصل الدراسى الأول

الدوال الحقيقية ورسم الدوال

- الدوال الحقيقية
- اطراد الدوال
- الدالة الزوجية والدوال الفردية
- التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية
- حل المعادلات ومتباينات القية المطلقة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

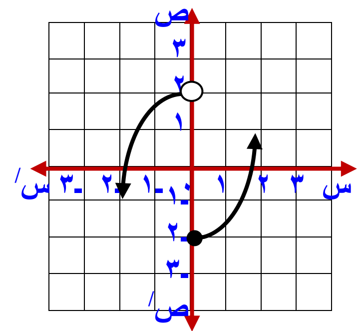
مجـــــال الدالـــــــة

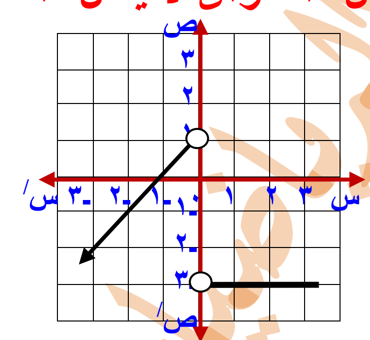
* إذا كانت س ، ص مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من المجموعة ح فإن العلاقة من س إلى ص تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من س بعنصر واحد فقط من ص ، تسمى س مجال الدالة ، ص المجال المقابل لها

* مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

* العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد مستقيم واحد على الأقل يوازى محور الصادات ويقطع الشكل البيانى للدالة فى أكثر من نقطة

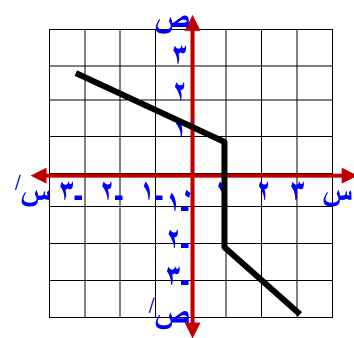
مثـــ١ـــال :أى من الأشكال يمثل دالة وأى لا يمثل دالة

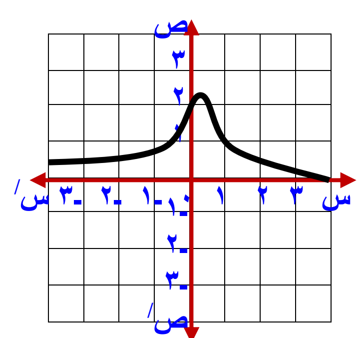


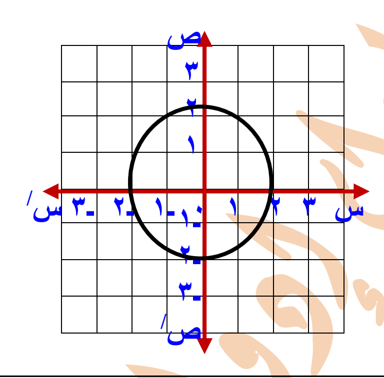


يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان ص

مثـــ٢ـــال بين أياً من الأشكال البيانية يمثل دالة أيها لا







لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى عند النقطة ١ ∋ المجال يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة	يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن يوجد خط مستقيم // محور الصادات يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة

تحديد مجال الدالة الحقيقية

[١] مجال الدالة كثيرة الحدود: هو ح مالم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

[٢] مجال الدالة الكسرية : هو ح ـ مجموعة أصفار المقام

[٣] مجال الدالة الجذرية : إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ ص$^+$

!) عندما: (ن) عدد فردى فإن مجال الدالة = ح

!!) عندما (ن) عدد زوجى فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ (س) ≥ ٠

مثـال١: عين مجال الدالة : د(س) = س^٣ ـ ٥ س + ٤

الدالة كثيرة الحدود ∴ مجال الدالة هو ح

مثـال٢: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ح ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ س^٢ ـ ٩ = (س ـ٣)(س +٣) = ٠ ⟸ س = ٣ أ، ـ٣

∴ مجال الدالة = ح ـ {-٣ ، ٣}

مثـال٣: عين مجال الدالة : د(س) = ٥ + $\sqrt{س - ٣}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt{ر(س)}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية التى تجعل ر(س) ≥ صفر (ما تحت الجذر ≥ صفر)

مجال الدالة = { س : س ∈ ح ، س ـ ٣ ≥ ٠}

= { س : س ∈ ح ، س ≥ ٣ } = [٣ ، ∞ [

مثـال٤: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ح ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ س^٢ ـ ٥س +٦ = (س ـ٢)(س ـ٣) = ٠

⟸ س = ٢ أ، ٣ ∴ مجال الدالة = ح ـ {٢ ، ٣}

مثـ٥ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ٨}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt[3]{\text{ر(س)}}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية   مجال الدالة هو ع

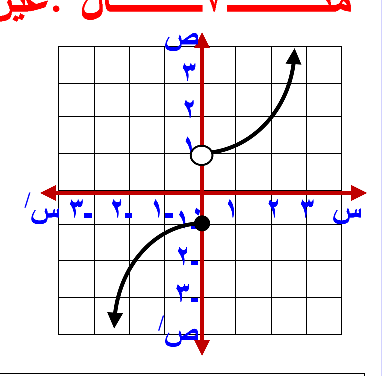
مثـ٦ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$

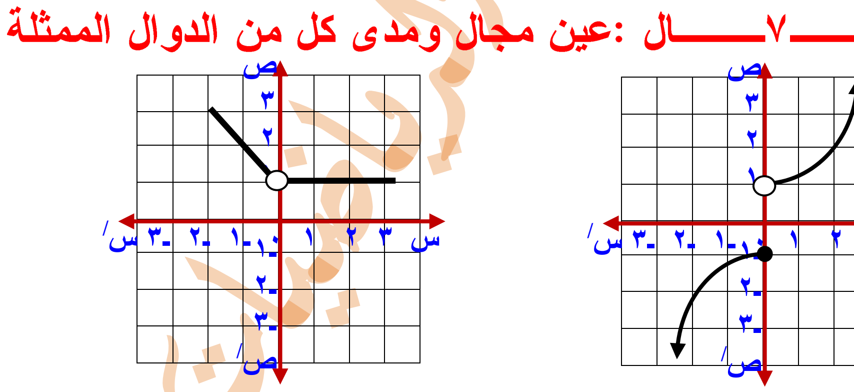
الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ــ { أصفار المقام }

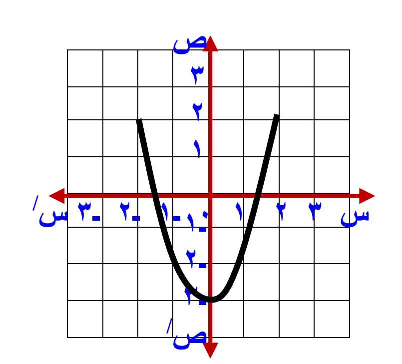
بوضع المقام = ٠ ⟸ س^٢ + ٤ ⟸ س^٢ = ــ ٤ ⟸ ليس لها حل فى ع

∴ مجال الدالة هو ع

مثـــــ٧ــــال :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ع المدى = ع ــ]١ ، ــ١[	المجال = ع ــ {٠} المدى =]١ ، ٣]	المجال = [ــ٢ ، ٢] المدى = [ــ٣ ، ٢]

العمليات على الدوال

إذا كانت : د١ ، د٢ دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن:

- (د١ ± د٢) (س) = د١ (س) ± د٢ (س) ⟸ حيث مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢
- (د١ × د٢) (س) = د١ (س) × د٢ (س) ⟸ حيث مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢
- ($\frac{\text{د}_١}{\text{د}_٢}$) (س) = $\frac{\text{د}_١\text{ (س)}}{\text{د}_٢\text{ (س)}}$

حيث مجال ($\frac{\text{د}_١}{\text{د}_٢}$) هو م١ ∩ م٢ ــ مجموعة أصفار د٢

مثـــ٨ـــال : عين مجال د(س) = √(س − ٣) + √(٥ − س)

الحـــــــــــل

مجال الدالة = √(س − ٣)   م١ = { س : س ∈ ح ، س − ٣ ≥ ٠ } = [٣ ، ∞ [

مجال الدالة = √(٥ − س)   م١ = { س : س ∈ ح ، ٥ − س ≥ ٠ } =] −∞ ، ٥]

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = { س : س ∈ ح ، س ≥ ٣ ، س ≤ ٥ } = [٣ ، ٥]

مثـــ٩ـــال : عين مجال د(س) = √(س − ٢) / (س − ٣)

الحـــــــــــل

مجال البسط   م١ = { س : س ∈ ح ، س − ٢ ≥ ٠ } = [٢ ، ∞ [

مجال المقام   م٢ = ح − ٣

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ − { أصفار المقام }

= { س : س ∈ ح ، س − ٢ ≥ ٠ } − { ٣ } = [٢ ، ∞ [− { ٣ }

مثـــ١٠ـــال : عين مجال د(س) = (س + ٥) / √(س + ١)

الحـــــــــــل

مجال البسط = م١ = ح   ،   مجال المقام = م٢ = { س : س ∈ ح ، س +٢ > ٠ }

مجال الدالة = { س : س ∈ ح ، س ≥ −١ } =] −١ ، ∞ [

مثـــ١١ـــال : عين مجال د(س) = √(س − ٢) + ١ / √(٨ − ٢س)

الحـــــــــــل

م١ = { س : س ∈ ح ، س − ٢ ≥ ٠ } = [٢ ، ∞ [

م٢ = { س : س ∈ ح ، ٨ − ٢س > ٠ } =] −∞ ، ٤ [

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ∞ [∩] −∞ ، ٤ [= [٢ ، ٤ [

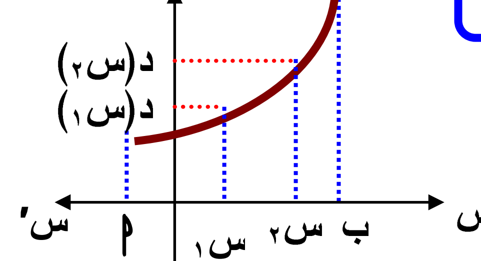
مثـــ١٢ـــال :عين مجال د(س) = √((س + ٣) / (س + ٢))



الحــــــــل

مجال الدالة]ـ٢ ، ١[∪]ـ١ ، ـ٣[

= ع ـ]ـ٣ ، ـ٢[



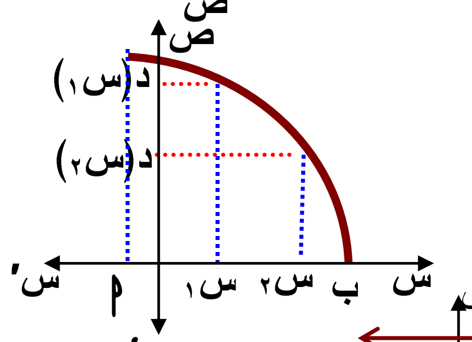


اطراد الدوال

(١) يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة [ٲ ، ب]

إذا كان : س٢ > س١ ⟸ د (س٢) > د (س١)

لكل س١ ، س٢ ∈ [ٲ ، ب]



(٢) يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة [ٲ ، ب]

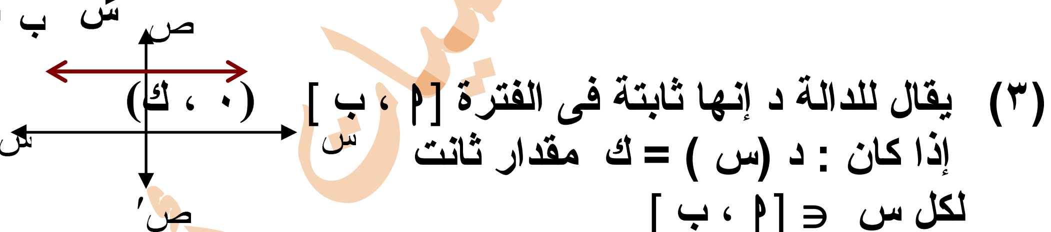
إذا كان : س٢ > س١ ⟸ د (س٢) < د (س١)

لكل س١ ، س٢ ∈ [ٲ ، ب]

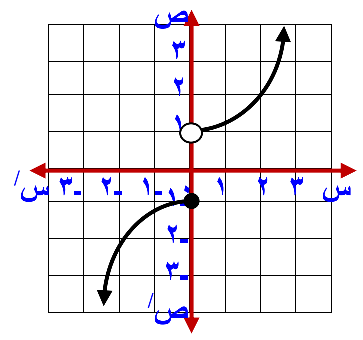
(٣) يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة [ٲ ، ب]

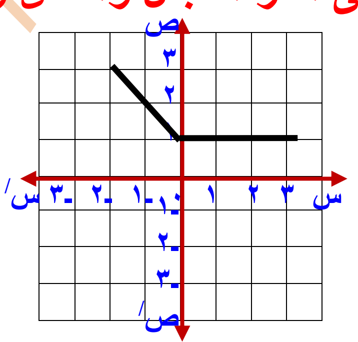
إذا كان : د (س) = ك مقدار ثابت

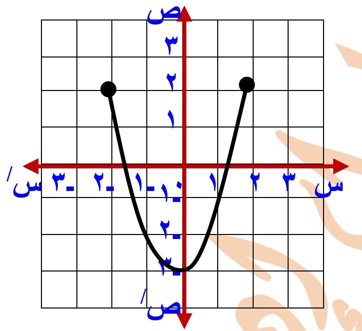
لكل س ∈ [ٲ ، ب]



مثــ١٣ــال : من الرسم البيانى اذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

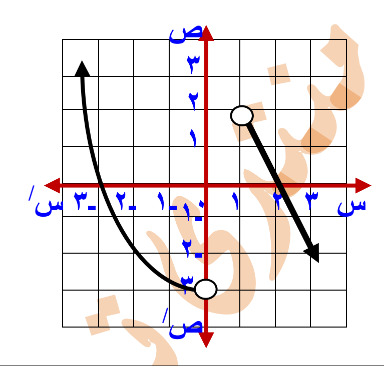


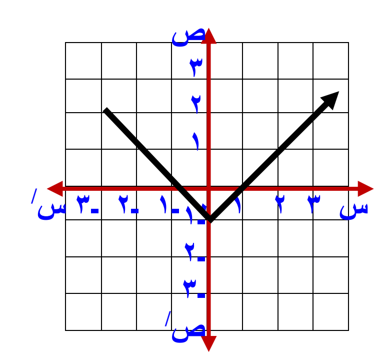


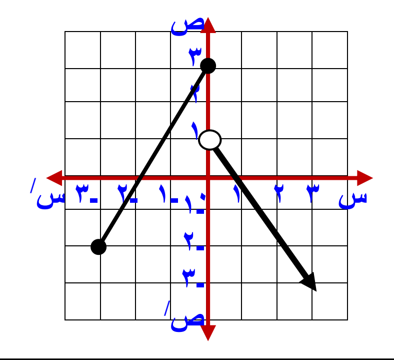


المجال = ع ،	المجال = ع ـ {٠} ،	المجال = [ـ٢ ، ٢]
المدى = ع ـ [١ ، ـ١]	المدى =]١ ، ٣]	المدى = [ـ٣ ، ٢]
الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠[	الدالة تناقصية فى] ـ٢ ، ٠[	الدالة تناقصية فى] ـ٢ ، ٠[
الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [	الدالة ثابتة فى] ٠ ، ٣]	الدالة تزايدية فى] ٠ ، ٢ [

مثـــــــال ١٤ :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ح المدى = ح -] ٠ ، ١] الدالة تزايدية فى] -∞ ، ٠ [الدالة تناقصية فى] ١ ، ∞ [	المجال =] -٣ ، ∞ [المدى = [١ ، ∞ [الدالة تناقصية فى] -∞،٠ [الدالة ثابتة فى] ٠ ، ∞ [	المجال =] -٣ ، ∞ [المدى =] -∞ ، ٣] الدالة تزايدية فى] -٣ ، ٠] الدالة تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة الزوجية والدالة الفردية

(١) إذا كان د(- س) = د(س) تكون الدالة زوجية

ويكون منحناها متماثلاً حول محور الصادات

مثل : د(س) = س^{٢} ، د(س) = جتا س ، د(س) = م ، د(س) = س^{٤}

(٢) إذا كان د(- س) = - د(س) تكون الدالة فردية

ويكون منحناها متماثلاً حول نقطة الأصل

مثل : د(س) = س ، د(س) = جا س ، د(س) = ظا س ، د(س) = جا س

(٣) معظم الدوال لازوجية ولافردية (٤) جا (- س) = - جا س

(٥) جتا(- س)= جتا س (٦) ظا(- س) = - ظا س

مثـــال١٥: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ (ب) د(س) = س^{٢} جا س + س

(جـ) د(س) = س جتا س ظا س + جا^{٢} س

الحـــــــل

(أ) $د(-س) = \frac{جا(-س)}{-س} = \frac{-جا س}{-س} = \frac{جا س}{س} = د(س)$ ∴ الدالة زوجية

(ب) $د(-س) = (-س)^٢ جا(-س) + (-س)$

$= س^٢ \times (-جا س) - س = -س^٢ جا س - س$

$= -(س^٢ جا س + س) = -د(س)$ ∴ الدالة فردية

(جـ) $د(-س) = (-س) جتا(-٥س) ظا(-س) + [جا(-س)]^٢$

$= (-س) جتا ٥س (-ظا س) + [-جا س]^٢$

$= س جتا ٥س ظا س + جا^٢ س = د(س)$ ∴ الدالة زوجية

مثـــال١٦: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) $د(س) = \frac{س^٣ جا ٣س}{١ + س}$ (ب) $د(س) = \frac{٥}{٥^س} + ٥ \times (٥)^س$

(جـ) $د(س) = (\frac{١ + س}{١ - س})^٧ + (\frac{١ - س}{١ + س})^٧$

الحـــــــل

(أ) $د(-س) = \frac{(-س)^٣ جا(-٣س)}{١ + (-س)} = \frac{-س^٣ \times (-جا ٣س)}{١ - س}$

$= \frac{-س^٣ \times جا ٣س}{١ - س} X د(س)$ ، $د(-س) X -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

(ب) $د(-س) = \frac{٥}{(٥)^{-س}} + ٥ \times (٥)^{-س} = ٥ \times (٥)^س + \frac{٥}{٥^س} = د(س)$

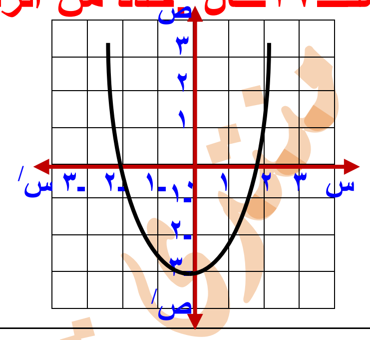
∵ $د(س) = د(-س)$ ∴ الدالة زوجية

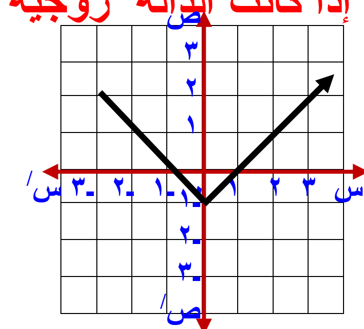
(جـ) $د(-س) = (\frac{١-(-س)}{١+(-س)})^٧ + (\frac{١+(-س)}{١-(-س)})^٧$

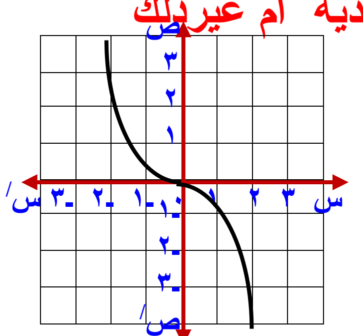
$= (\frac{١ + س}{١ - س})^٧ + (\frac{١ - س}{١ + س})^٧ = د(س)$

∵ $د(س) = د(-س)$ ∴ الدالة زوجية

مثـــال١٧: حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غيرذلك







المجال = ع المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة زوجية	المجال = [ـ٣ ، ∞ [المنحنى ليس متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية	المجال = ع المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

مثـــال١٨:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س ـ ٢ ، س ⩾ ٠ ؛ - س ـ ٢ ، س < ٠

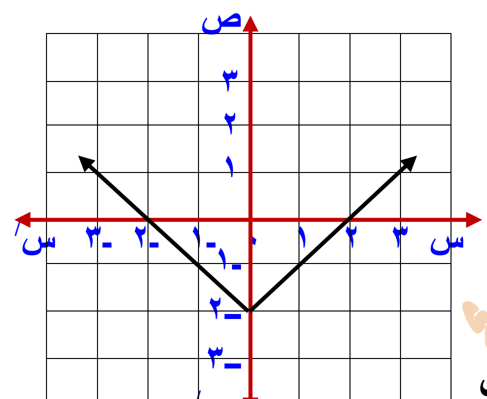
الحـــــــل

س ـ ٢ : س ⩾ ٠				ـ س ـ ٢ : س < ٠			
س	٢	١	٠	س	٠	ـ١	ـ٢
د(س)	٠	ـ١	ـ٢	د(س)	ـ٢	ـ١	٠

المجال ح ، المدى = [٢ ، ا [

الدالة متناقصة فى]- ∞ ، ٠ [، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

وهى دالة زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات



مثـــال١٨:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س + ٣ ، س > ٠ ؛ ٣ ، س ⩽ ٠

الحـــــــل

س+٣ : س > ٠				٣ : س ⩽ ٠			
س	٢	١	٠	س	٠	ـ١	ـ٢
د(س)	٥	٤	٣	د(س)	٣	٣	٣

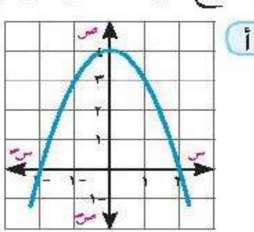
المجال ح ، المدى = [٣ ، ا [

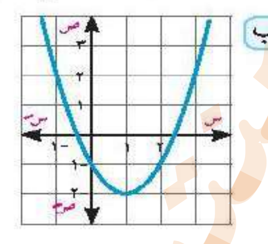
الأطراد: الدالة ثابتة فى]- ∞ ، ٠]، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

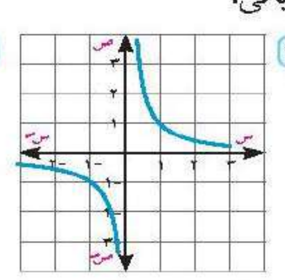
، الدالة ليست زوجية ولافردية

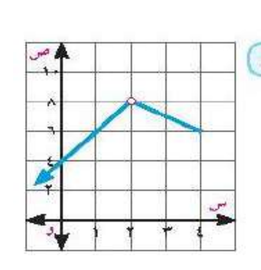
تمـــــــــارين

١ استنتج من الشكل البياني مجال الدالة ومداها في كل ممايأتي:

أ


ب


ج


د


٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح

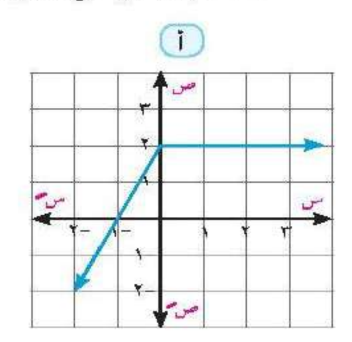
د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ≤ س < ١
  س عندما ١ ≤ س ≤ ٦

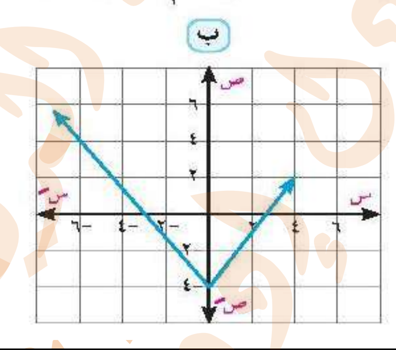
ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

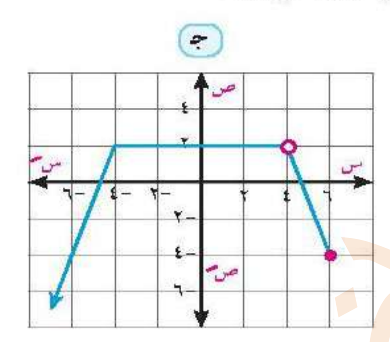
٣ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د في كل من مايأتي ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ) د(س) = س^{٢} - ٥ ب) د (س) = ٤ - س^{٢} ج) د(س) = (س -١)^{٢} + ١

٤ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ


ب


ج


٥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د في كل من مايأتي ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

أ) د (س) س^{٣} ب) د(س) = س^{٣} - ٣س ج) د(س) = $\frac{-١}{س - ٢}$



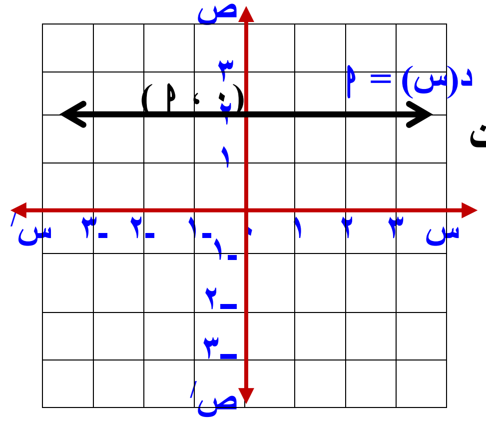
٦ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١ ب) د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣} ج) د (س) = ٥

د) د(س) = س^{٢} - ٣س ه) د (س) = $\frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$ و) د(س) = س حتا س

التمثيل البيانى للدوال و التحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود



[١] الدالة الثابتة: الصورة العامة هى: د (س) = ٩ : ٩ ثابت

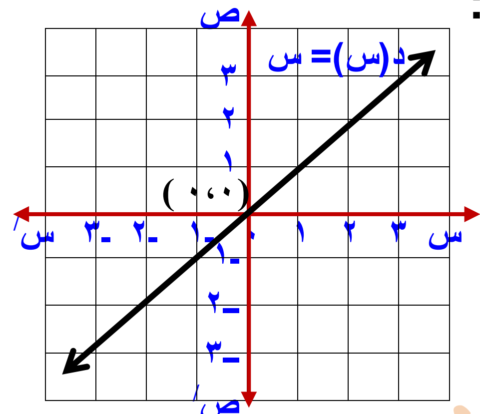
وتمثل بيانياً بمستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٩)

كما فى الشكل

* مجاله = ع ، مداها = { ٩ }

الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)



[٢] الدالة الخطية: أبسط صورة لدالة الدرجة الأولى هى:

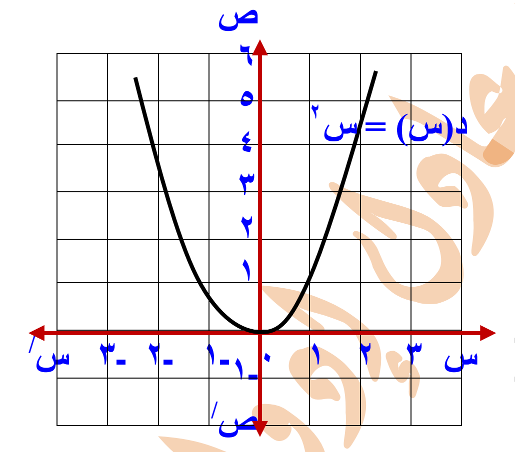
- د : ع ⟵ ع ، د (س) = س وتمثل بيانياً

بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠) ميله = ١

* مجالها = ع ، مداها = ع

* الدالة تزايدية على مجالها ع

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)



[٣] الدالة التربيعية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:

- د : ع ⟵ ع ، د (س) = س^{٢}

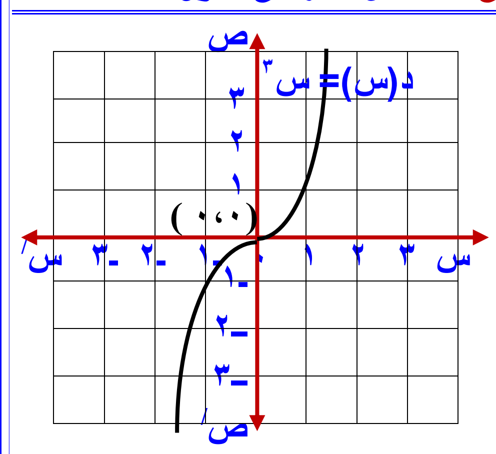
وتمثل بيانياً بمنحنى مفتوح لأعلى

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى] −∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

[٤] الدالة التكعيبية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:



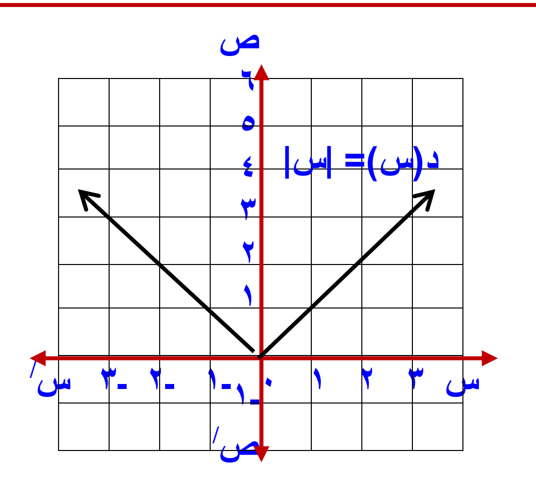
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = س٣ وتمثل بيانياً

بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠) الدالة فردية

* مجال الدالة = ع ، مدى الدالة = ع

* ، تزايدية فى على مجالها ع

ثانياً : دالة المقياس



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ⟵ ع ، د (س) = | س |

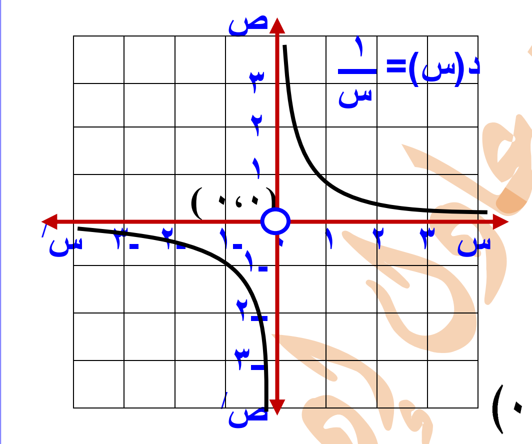
د (س) = { س : س ⩾ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

ثانياً : الدالة الكسرية



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ـ {٠} ⟵ ع ، د (س) = $\frac{١}{س}$

تمثل بمنحنى من جزئين أحداهما فى الربع الأول

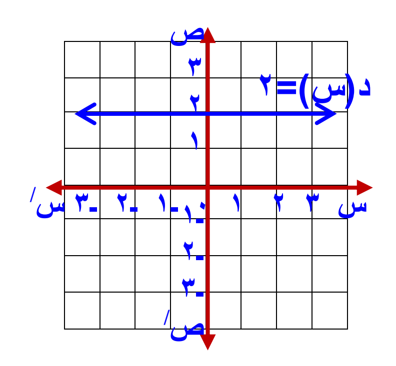
والآخر فى الربع الثالث دون أن يقطعا المحورين

س س/ , ص ص/ ومتماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

* مجالها = ع ـ {٠} ، مداها = ع ـ {٠}

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠[، تناقصية فى]٠، ∞[

* الدالة فردية (متماثل حول نقطة الأصل)



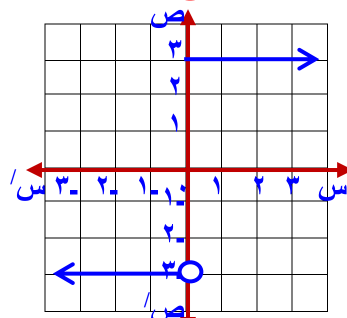
مثـــ١ـــال: ارسم الدالة د(س) = ٢ ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحـــــــــــل

المجال ح ، المدى = { ٢ }

الدالة ثابتة ، الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

مثـــ٢ـــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { ـ٣ : س < ٠ ، ٣ : س ⩾ ٠ }



الحـــــــــــل

المجال ح ، المدى = {ـ٣ ، ٣ }

الدالة ثابتة فى]ـ ∞ ، ٠[، فى]٠ ، ∞ [

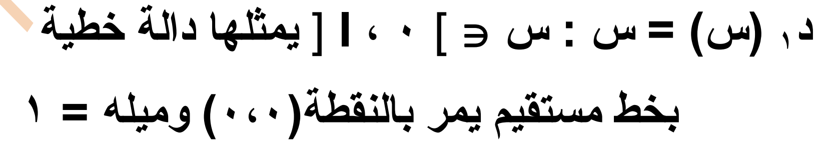
الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٣ـــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س : س < ٠ ، $س^٢$: س ⩾ ٠ }

الحـــــــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

$د_١$ (س) = س : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة خطية



بخط مستقيم يمر بالنقطة(٠،٠) وميله = ١

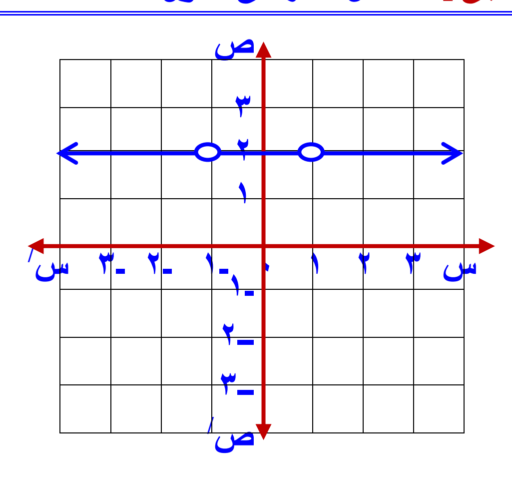
$د_٢$ (س) = $س^٢$: س ∋]ـ ∞ ، ٠[يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

المجال ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى]ـ ∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية



مثـــ٤ـــال: ارسم د(س) = $\frac{٢ س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

حيث س ≠ ± ١ مع ذكر المجال والمدى واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

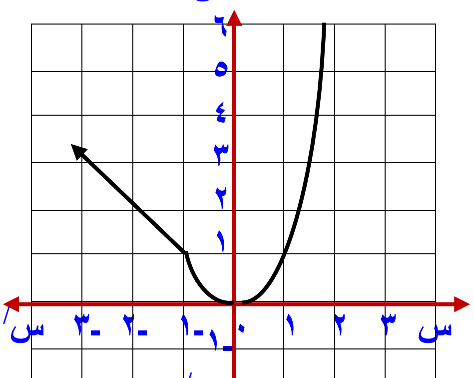
الحـــــــــل

د(س) = $\frac{٢ (س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = $\frac{٢ (س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)}$ = ٢

مجال د = ع - { ـ١ ، ١ }

مدىالدالة = { ٢ } ، الدالة زوجية

مثـــ٥ـــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = $\begin{cases} س^٣ & : س > ١ \\ |س| & : س \leqslant ١ \end{cases}$



الحـــــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

د$_١$ (س) = س^٣ : س ∈] ١ ، ∞ [يمثلها دالة تكعيبية

د$_٢$ (س) = |س| : س ∈] -∞ ، ١]

حسب تعريف دالة المقياس د(س) = ـ س

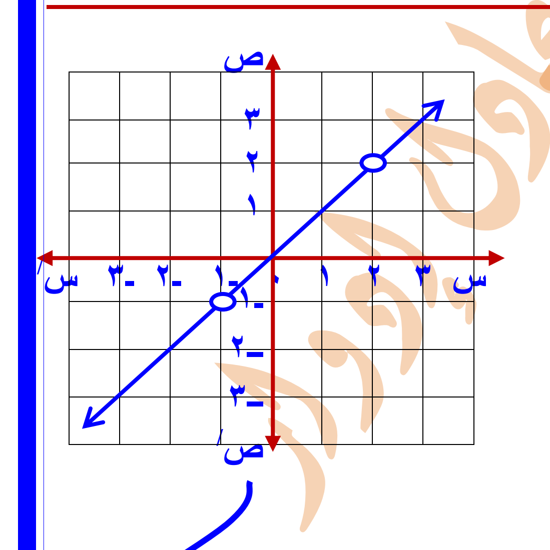
المجال ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ـ١] ، تناقصية فى]- ١ ، ٠ [، تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٦ـــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٣ - س^٢ + ٢س}{س^٢ - س + ٢}$

: س ≠ ٢ ، ـ١ مبيناً المجال والمدى وابحث اطرادها



الحـــــــــل

د(س) = $\frac{س (س - ٢)(س + ١)}{(س - ٢)(س + ١)}$ = س

المجال = ع ـ { ٢ ، ـ١} ، المدى = ع - { ٢، ـ١}

د متزايدة على مجالها

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــ٧ــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س^٢ : س > ٠ ، $\frac{1}{س}$: س < ٠ }

الحـــــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

د١ (س) = س^٢ : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

د٢ (س) = $\frac{1}{س}$: س ∋] – ∞ ، ٠[دالة كسرية

تمثل بمنحنى فى الربع الثالث دون أن يقطع المحورين

المجال ع – {٠} ، المدى = ع – {٠}

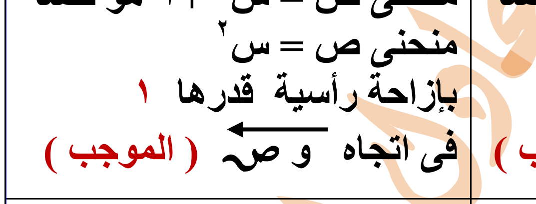
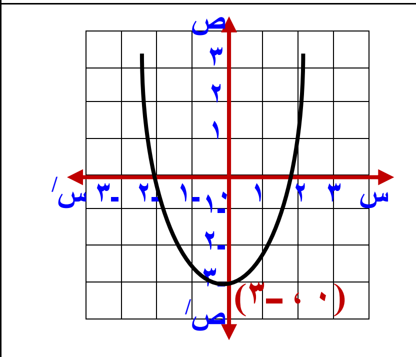
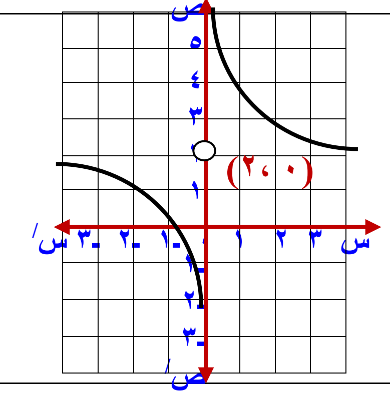
الأطراد : الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

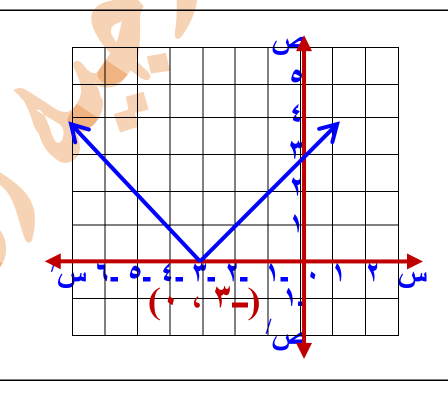
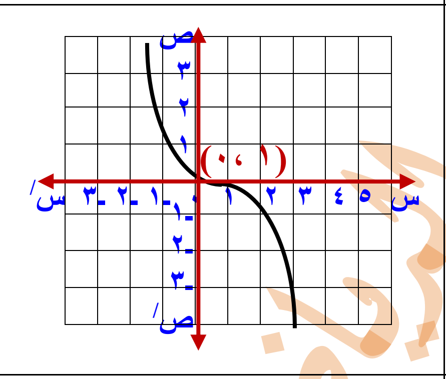
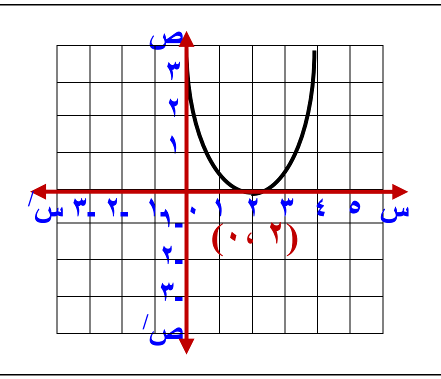
أولا : الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + ﺃ ، ﺃ ∋ ع – {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |ﺃ| فى اتجاه : { و ص ← : ﺃ > ٠ ، و ص/ ← : ﺃ < ٠ }

منحنى ص = س^٢ – ٣ هو نفسه منحنى ص = س^٢ بإزاحة رأسية قدرها ٣ فى اتجاه و ص/ (السالب)	منحنى ص = ١\س – ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها ٢ فى اتجاه و ص (الموجب)	منحنى ص = س^٣ +١ هو نفسه منحنى ص = س^٢ بإزاحة رأسية قدرها ١ فى اتجاه و ص (الموجب) 
		(٠ ، ١)

ثانيا : الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

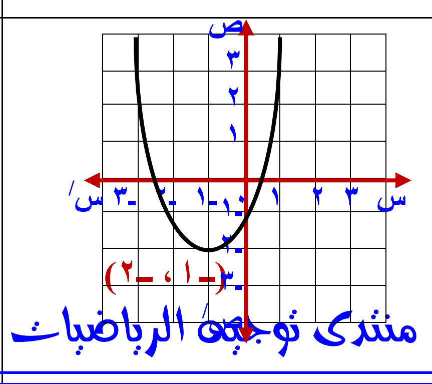
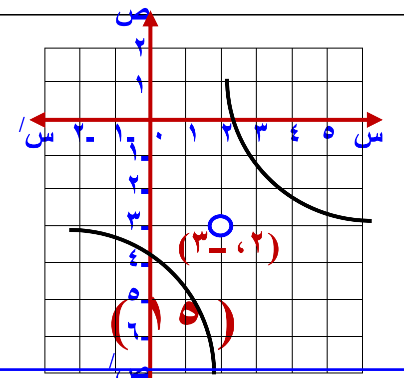
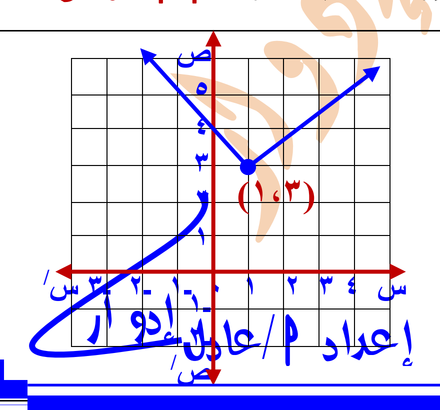
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ب) ، ب ∈ ع − {٠} هو نفس المنحنى
ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |ب| فى اتجاه :
- و س ← : ب > ٠
- و س' ← : ب < ٠

منحنى ص = |س+٣| هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة أفقية قدرها ٣ فى اتجاه و س' (السالب)	منحنى ص = $(س - ١)^٣$ هو نفسه منحنى ص = $س^٣$ بإزاحة أفقية قدرها ١ ف اتجاه و س (الموجب)	منحنى ص = $(س - ٢)^٢$ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة أفقية قدرها ٢ فى اتجاه و س (الموجب)
		
نقطة تماثل (−٣، ٠) ، المدى [٠، ∞[الاطراد: تناقصية فى]−∞ ، ٠[تزايدية فى]٠ ، ∞[	نقطة تماثل (١ ، ٠) ، المدى = ع الدالة تناقصية على مجالها	نقطة تماثل (٢ ، ٠) ، المدى [٠، ∞[الاطراد: تناقصية فى]−∞ ، ٢[تزايدية فى]٢ ، ∞[

ثالثا :

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + أ) + ب ، أ، ب ∈ ع − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |أ| فى أتجاه
- و س ← عندما أ > ٠
- و س' ← عندما أ < ٠

ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | فى اتجاه
- و ص ← عندما ب > ٠
- و ص' ← عندما ب < ٠

منحنى ص = $(س + ١)^٢ - ٢$ هو نفسه منحنى ص = $س^٢$ بإزاحة رأسية قدرها |٢| وص' بإزاحة أفقية قدرها |١| وس'	منحنى ص = $\frac{١}{س - ٢} - ٣$ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها |٣| وص' بإزاحة أفقية قدرها |٢| وس	منحنى ص = |س − ١| + ٣ هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة رأسية قدرها |٣| وص بإزاحة أفقية قدرها |١| وس
		

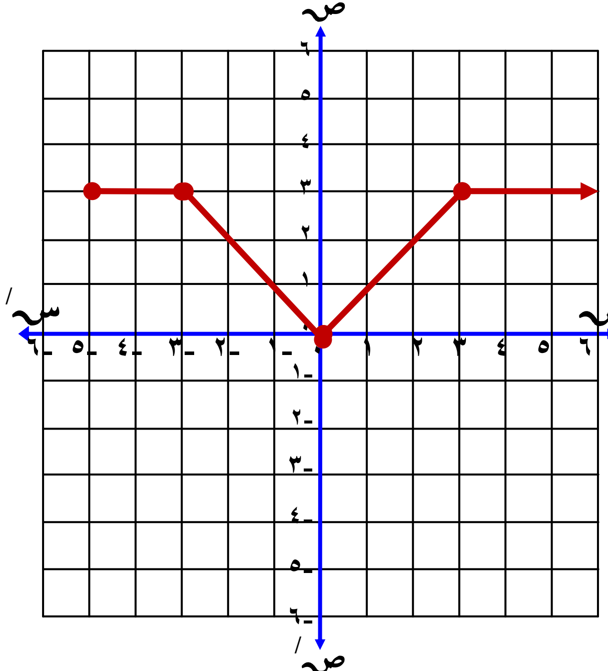
رابعا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = ﺃ د(س) حيث ﺃ ∈ ع⁺

- تمدد رأسى للمنحنى إذا كان ﺃ>١ ، أنكماش رأسى للمنحنى إذا كان ﺃ <١

مثـــ١ـــال: ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) =
{ ٣ ، -٥ ⩽ س < -٣
|س| ، -٣ ⩽ س ⩽ ٣
٣ ، س > ٣ }

مع ذكر المجال والمدى ، ابحث اطرادها وبين أنها دالة زوجية .

الحـــــــــل



د$_1$: دالة ثابتة د(س) = ٣ فى [-٥ ، -٣ [

د$_2$: دالة مقياس د(س) = { س : ٠ ⩽ س ⩽ ٣ ، -س : -٣ ⩽ س < ٠ }

د$_3$: دالة ثابتة د(س) = ٣ فى]٣ ، ∞[

المجال = [-٥ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٣]

ثابتة فى [-٥ ، -٣[، د متناقصة فى]-٣ ، ٠[

، تزايدية فى] ٠ ، ٣ [، ثابتة فى] ٣ ، ∞[

ادالة ليست زوجية وليست فردية

مثـــ٢ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = { |س - ١| : س <١ ، س^2 - ١ : س >١ }

اذكر المجال والمدى وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية ، وابحث اطرادها :

الحـــــــــل

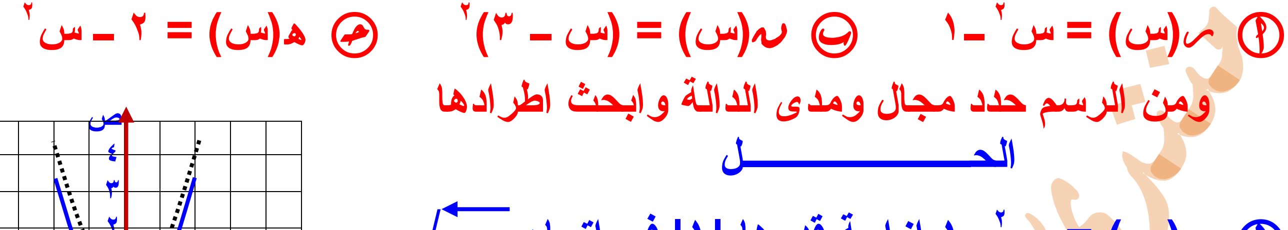
د$_1$: دالة مقياس د = { س - ١ : س ∈] -∞ ، ٠] ، - س - ١ : س ∈]٠ ، ١[}

د$_2$: دالة تربيعية بإزاحة مقدارها |١| فى اتجاه وس←

المجال = ع - {١} ، المدى = [٠ ، ∞[

الدالة متناقصة فى] -∞ ، ٠[

تتزايد فى] ١ ، ٠[، تتزايد فى] ١ ، ∞ [



مثـــ٣ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ىر ، ه حيث

(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ (ب) ىر(س) = (س ـ ٣)^{٢} (جـ) ه(س) = ٢ ـ س^{٢}

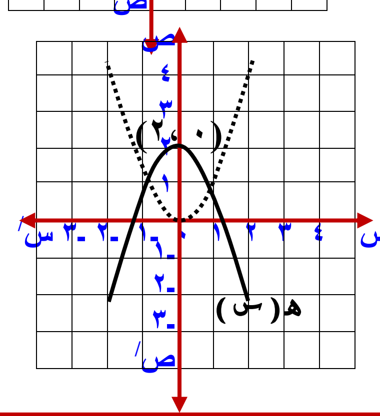
ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــــل

(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص/

رأس المنحنى (٠ ، ـ١) ، المدى = [ـ١ ، ∞ [

تناقصية]ـ∞، ٠[، تزايدية] ٠، ∞[



(ب) ىر(س) = (س ـ ٣)^{٢} قدرها |٣| فى اتجاه وس

رأس المنحنى (٣ ، ٠) ، المدى = [٠ ، ∞ [

تناقصية]ـ∞، ٣[، تزايدية]٣، ∞[

(جـ) ه (س) = ٢ ـ س^{٢}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

وإزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وص

رأس المنحنى (٠ ، ٢) ، المدى =] ـ ∞ ، ٢]

، الدالة تزايدية فى]ـ∞، ٠[، تناقصية فى] ٠، ∞[

مثـــ٤ـــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

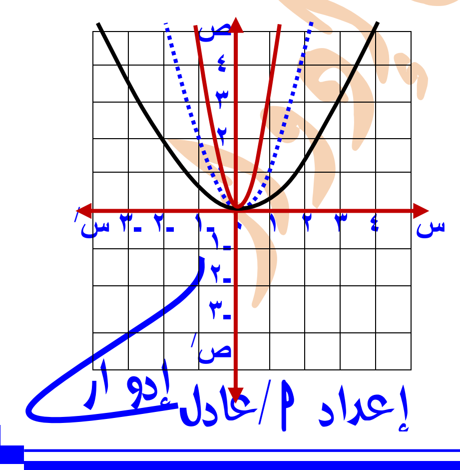
١) د$_{١}$ (س) = س^{٢} ٢) د$_{٢}$ (س) = ٢س^{٢} ٣) د$_{٣}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

الحـــــــــــــــل

جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، مداها = [٠ ، ∞ [، جميع الدوال زوجية

، جميعها متناقصة فى]- ∞ ، ٠[، متزايدة فى [٠ ، ∞ [



مثـــ٥ـــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها
واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) $د_١$ (س) = س^٢ ٢) $د_٢$ (س) = ـ س^٢ ٣) $د_٣$ (س) = ـ٢ س^٢

الحـــــــــــــل

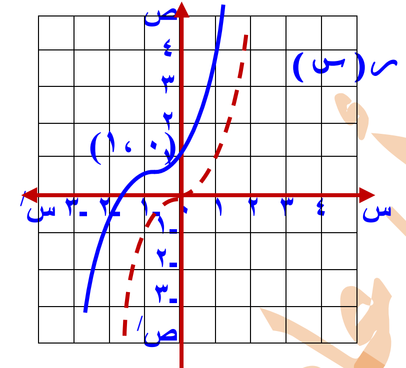
جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)
، مجالها ع ، جميع الدوال زوجية
، $د_١$ مفتوح لأعلى مداها = [٠ ، ∞ [،
$د_٢$ مفتوح لأسفل مداها]- ∞ ، ٠]
الدالة متزايدة فى]- ∞ ، ٠[، متناقصة فى]٠ ، ∞ [
$د_٣$ مفتوح لأسفل مداها]- ∞ ، ٠]
الدالة متزايدة فى]- ∞ ، ٠[، متناقصة فى] ٠ ، ∞ [

مثـــ٦ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^٢ لتمثيل الدوال ر ، ى ، هـ حيث

(أ) ر(س) = س^٣ + ١ (ب) ى(س) = (س ـ ٢)^٣ (جـ) هـ(س) = (س + ١)^٣ + ٢

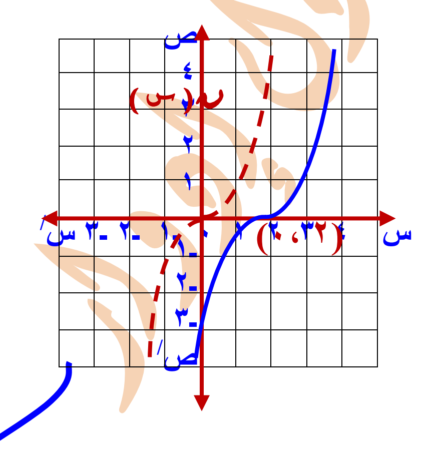
ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــل



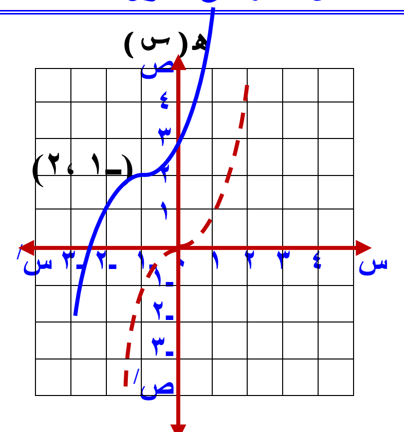
(أ) ر(س) = س^٣ + ١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص
رأس المنحنى (٠ ، ١) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها



(ب) ى(س) = (س ـ ٢)^٣

إزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وس
رأس المنحنى (٢ ، ٠) ، المدى = ع
، الدالة تزايدية على مجالها



ⓙ هـ(س) = (س + ١)^{٣} + ٢

إزاحة |٢| فى اتجاه وس/

وإزاحة |٢| فى اتجاه وص

رأس المنحنى (ـ١ ، ٢) ، المدى = ع

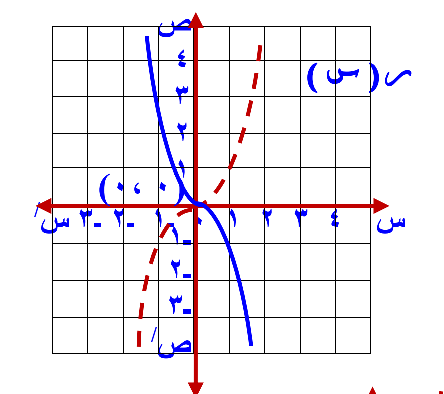
، الدالة تزايدية على مجالها

مثــ٧ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ں ، هـ حيث

ⓐ ر(س) = ـ س^{٣} ⓑ ں(س) = ٢س^{٣} ـ ٢ ⓙ هـ(س) = ١ـ (س + ٢)^{٣}

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــل

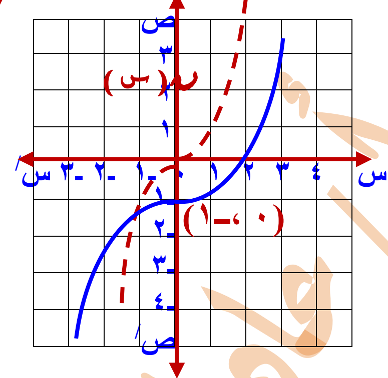


ⓐ ر(س) = ـ س^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

رأس المنحنى (٠ ،٠) ، المدى = ع

، الدالة تناقصية على مجالها



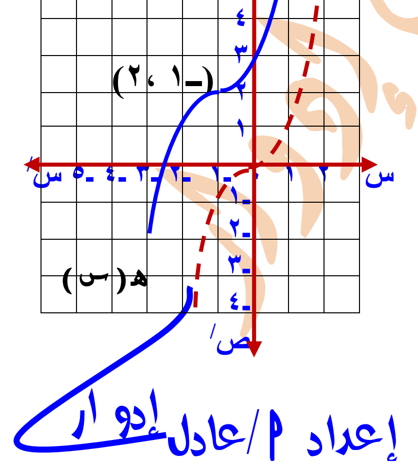
ⓑ ں(س) = ٢س^{٣} ـ ١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص/

يوجد تمدد فى الدالة

رأس المنحنى (٠ ، ـ ١) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها



ⓙ هـ (س) = ١ـ (س + ٢)^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

إزاحة |٢| فى اتجاه وس/

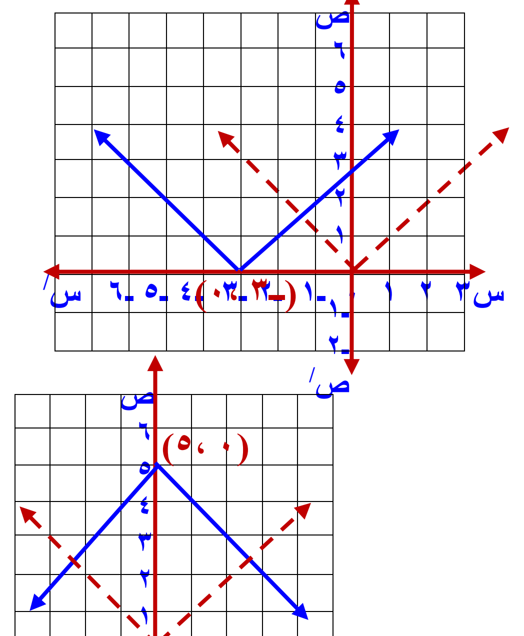
وإزاحة |١| فى اتجاه وص

رأس المنحنى (ـ٢ ، ١) ، المدى = ع

، الدالة تناقصية على مجالها

مثـــ٨ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ ر(س) = | س + ٣| ⓑ ن(س) = ٥ ـ | س |

الحـــــل



ⓐ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٣| وس′

نقطة التماثل (ـ٣ ، ٠) مجال ع ، مدى [٠،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٣[، تزايدية فى]ـ٣،∞[

ⓑ ن (س) = ٥ ـ |س| دالة مقياس

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٥| وص′

نقطة التماثل (٠ ، ٥) مجال ع، مدى] ـ ∞ ، ٥]

الدالة تزايدية فى]ـ∞،٠[، تناقصية فى]٠،∞[

مثـــ٩ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ هـ(س) = ٤ ـ |س +٢| ⓑ ر(س) = |$\frac{1}{2}$ س + ٤|+٢

الحـــــل

ⓐ هـ (س) = ٤ ـ |س +٣| دالة مقياس

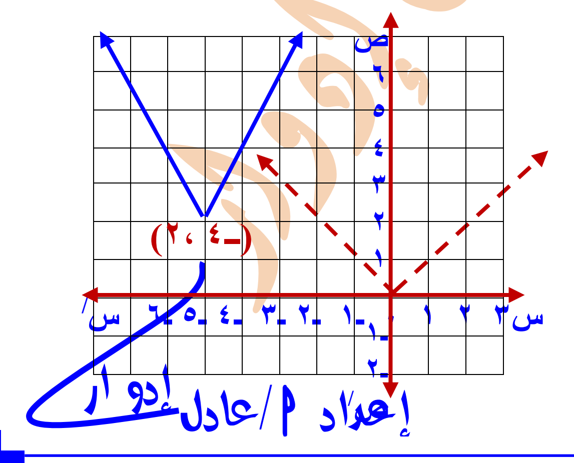
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| وW

بإزاحة أفقية قدرها |٣| وS′

نقطة التماثل (ـ٣، ٤) مجال ع ، مدى] ـ∞ ، ٤)

تزايدية فى]ـ∞،٠[،]٠،∞[



ⓑ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

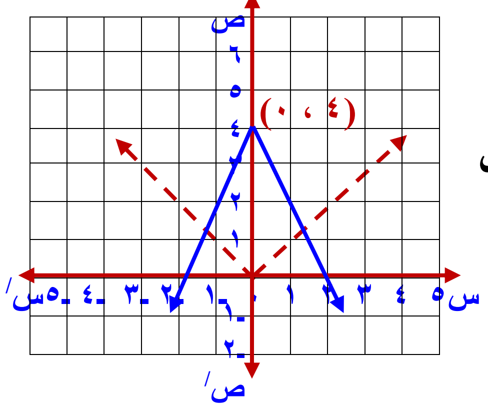
بإزاحة أفقية قدرها |٤| وس′ ، |٢| وص

نقطة التماثل (ـ٤ ، ٢) مجال ع ، مدى [٢،∞[

تناقصية فى]ـ∞، ـ٤[، تزايدية فى] ـ٤،∞[

مثـــ١٠ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) هـ(س) = ٤ ـ ٢ |س| (ب) ر(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

الحـــــــل



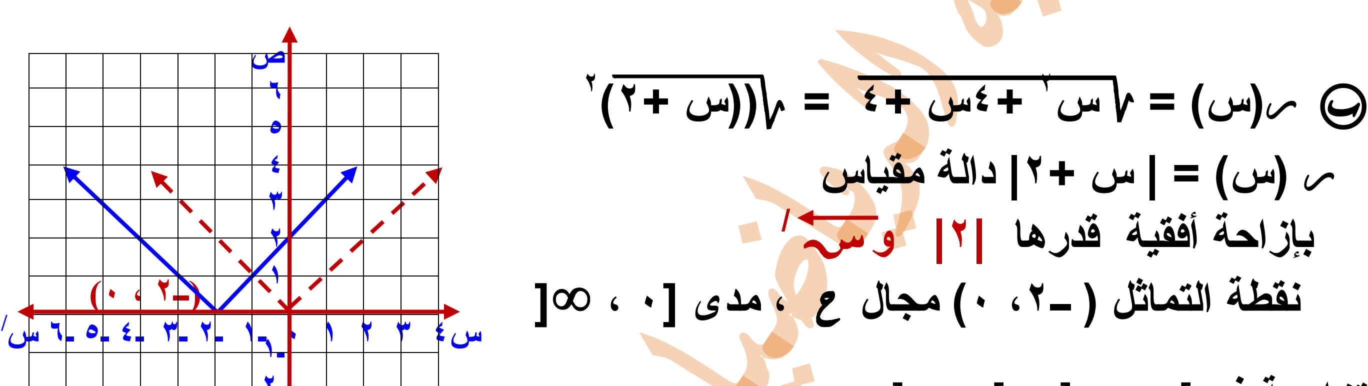
(أ) هـ (س) = ٤ ـ ٢ | س| دالة مقياس

تمدد فى منحنى الدالة و إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| وص

نقطة التماثل (٤ ، ٠) مجال ع ، مدى] ـ ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية فى] ـ∞،٠[، تناقصية فى] ٠،∞[



(ب) ر(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$ = $\sqrt{(س + ٢)^٢}$

ر (س) = | س + ٢| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٢| وس/

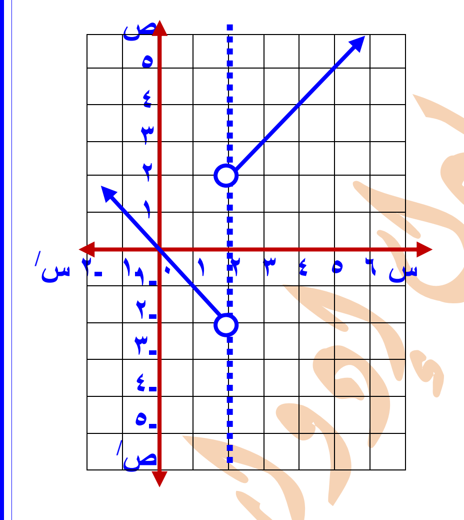
نقطة التماثل (ـ٢، ٠) مجال ع ، مدى [٠ ، ∞[

تزايدية فى]ـ∞،٠[،]٠،∞[

مثـــ١١ــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٢ ـ س ـ ٢}{| س ـ ٢ |}$ حيث س ≠ ٢

ومن الرسم عين المدى وابحث الاطراد

الحـــــــل



د(س) = { $\frac{(س ـ ٢)(س + ١)}{(س ـ ٢)}$ ، س >٢ ؛ $\frac{(س ـ ٢)(س + ١)}{ـ (س ـ ٢)}$ ، س <٢ }

∴ د(س) = { س+١ ، س > ٢ ؛ ـ س ـ ١ ، س < ٢ }

المجال = ع ـ {٢} ، المدى =]ـ٣ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]ـ ∞ ، ٢ [، متزايدة فى] ٢ ، ∞ [

مثـــال ١٢: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتية ثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) ر(س) = $\frac{١}{س-١}$ (ب) ن(س) = ($\frac{١}{س-٢}$) -٣

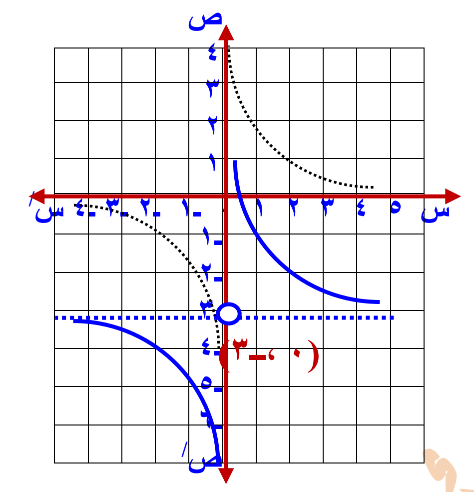
الحـــــــــــل

(أ) ر(س) = $\frac{١}{س-١}$ دالة كسرية

بإزاحة أفقية قدرها |١| وسَ ← نقطة التماثل (١ ، ٠)

مجال ح - {١} ، مدى ح - {٠}

تناقصية فى]-∞،١[، تناقصية فى]١،∞[



(ب) ن(س) = $\frac{١}{س}$ -٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| وصَ ←

بإزاحة أفقية قدرها |٢| وسَ ← نقطة التماثل (٢ ، -٣)

مجال ح - {٢} ، مدى ح - {-٣}

تناقصية فى]-∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثـــال ١٣: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتية ثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها (أ) ر(س) = $\frac{-١}{س}$ +٢ (ب) هـ(س) = $\frac{١}{س-٢}$ +٢

(أ) ر(س) = $\frac{-١}{س}$ -٢ دالة كسرية

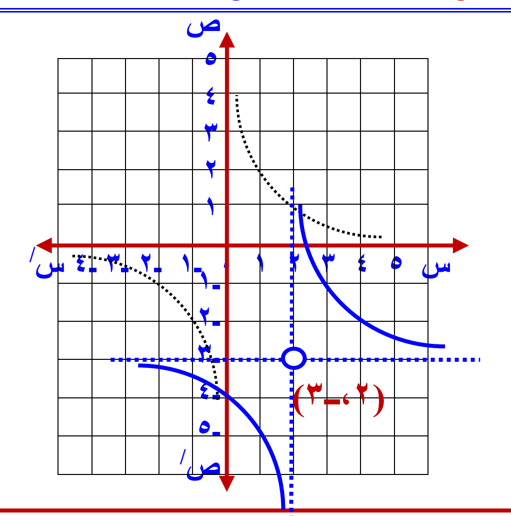
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٢| وصَ ← نقطة التماثل (٠ ، ٢)

مجال ح - {٠} ، مدى ح - {٢}

تزايدية فى]-∞،٠[، تزايدية فى]٠،∞[





ج) هـ (س) = ($\frac{1}{س - ٢}$) ـ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| وص ←

بإزاحة أفقية قدرها |٢| وس ← نقطة التماثل (٢ ، ـ٣)

مجال ع ـ {٢} ، مدى ع ـ {ـ٣}

تناقصية فى]ـ∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثــ١٤ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) =

$س^٢$	عندما س ∋ [ـ٣ ، ٣]
٣	عندما س ∋] ٣ ، ٦]
٩ ـ س	عندما س ∋] ٦ ، ٨]
صفر	عندما س >٨

ثم عين مدى الدالة واستنتج اطرادها

الحــــــــــل

من الرسم : مدى الدالة = [٠ ، ٩]

الدالة متناقصة فى [ـ٣ ، ٠] ،

الدالة متزايدة فى [٠ ، ٣]

الدالة ثابتة فى] ٣ ، ٦]

الدالة متناقصة فى] ٦ ، ٨]

الدالة ثابتة فى] ٨ ، ∞]

مثــ١٥ــال: ابحث نوع د(س) = $س^٣$ | س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــــل

د(ـ س) = $(ـ س)^٣$ | ـ س | = ـ $س^٣$ | س | = ـ د(س) ∴ د فردية

مثــ١٦ــال:ابحث نوع د(س) = |٥+ س| + |٥ـ س| من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــــل

د(- س) = |٥ ـ س| +|٥+ س| = |٥+ س| + |٥ ـ س| = د(س) ∴ الدالة زوجية

تمـــــــارين

١ ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ) $د(س) = \begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ س^٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

ب) $د(س) = \begin{cases} ٤ & \text{عندما } س < -٢ \\ س^٢ & \text{عندما } س \geqslant -٢ \end{cases}$

٢ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

منحنى ر(س) = س^٢ + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س^٢ بازاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه:

أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ ج) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ - س)^٢ + ٣ هي:

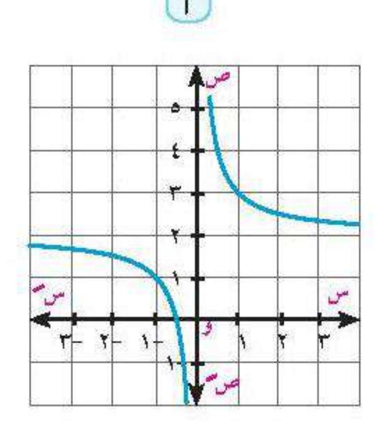
أ) (٢، ٣) ب) (٢، -٣) ج) (-٢، ٣) د) (-٢، -٣)

نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى:

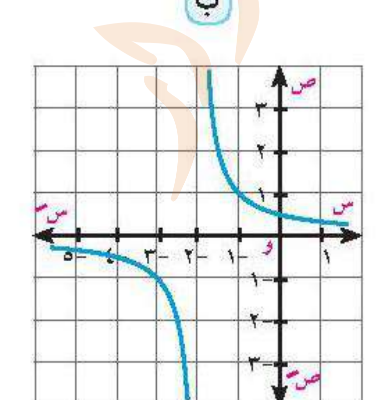
أ) (٣، -٤) ب) (-٣، -٤) ج) (٣، ٤) د) (-٣، ٤)

٣ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

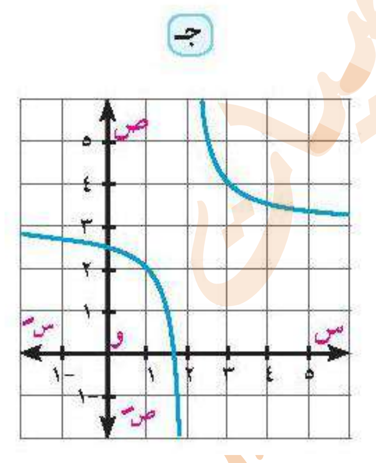
أ)



ب)



ج)



٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتي بيانيًا.

أ) د$_{١}$(س) = س^{٢} − ٤ ب) د$_{٢}$(س) = (س − ٣)^{٢} ج) د$_{٣}$(س) = (س − ١)^{٢} - ٢

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣}. لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ) د$_{١}$(س) = د(س) − ٣ ب) د$_{٢}$(س) = د (س − ٢) ج) د$_{٣}$(س) = د(س + ٣) + ٢

➢ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

٦ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ) ق(س) = د(س − ٣) ب) ق(س) = د(س) + ٢ ج) ق(س) = د(س - ٢) + ٢

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل مايأتى بيانيًا.

أ) د$_{١}$(س) = ٢ - |س| ب) د$_{٢}$(س) = −|س +٥| ج) د$_{٣}$(س) = ٤ - |س - ٢|

د) د$_{٤}$(س) = ٢|س| هـ) د$_{٥}$(س) = -٢ |س - ١| و) د$_{٦}$(س) = ٥ - ٢ |س +٢|

٨ ارسم منحنى الدالة د فى كل ممايأتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ) د$_{١}$(س) = { س^{٢} + ٢ عندما س ≥ ٠ ، -س^{٢} - ٢ عندما س < ٠ }

ب) د$_{٢}$(س) = { س^{٢} + ١ عندما -٤ ≤ س < ٠ ، -س^{٢} - ١ عندما ٠ ≤ س ≤ ٤ }

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

[١] حل معادلات القيمة المطلقة :

الطريقة البيانية: لحل المعادلة د(س) = ر(س) نرسم التمثيل البيانى

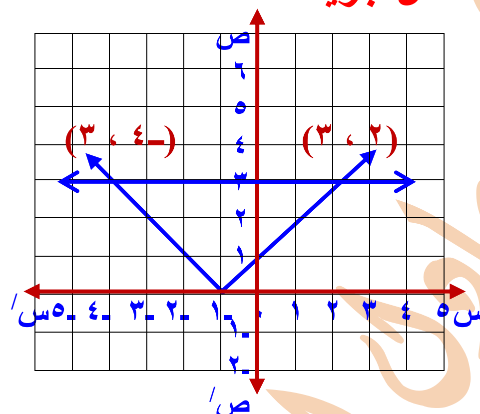
(مجموعة الإحداثيات السينية) لنقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر

خواص مقياس العدد :

- |س| ⩾ ٠ ، |س| = ٠ إذا وفقط إذا كان: س=٠
- |س ص| = |س| × |ص| ، |س + ص| ⩽ |س| + |ص|
- |س| = |ـ س|
- (مثال) |٣ـ٢ س| = |٢ س - ٣|
- إذا كان |س| = ٥ فإن س = ± ٥
- إذا كان |س - ٣| = |س + ١| فإن س -٣ = ± (س+١)
- |س|² = س² ، √س² = |س|

مثــ١ـــال: حل المعادلة |س +١| = ٣ بيانياً وتحقق من الحل جرياً





الحل بيانياً: نمثل الدالة د(س) = |س + ١|

والدالة ر(س) =٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين

(٢ ، ٣) ، (ـ٤ ، ٣) ∴ م.ح = {- ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : |س +١| = ٣ ⟸ (س +١)= ± ٣

⟸ س + ١ = ٣ أ، س + ١ = ـ٣

∴ س = ٣ ـ ١ =٢ أ، س = ـ٣ ـ ١ = ـ٤ ∴ م.ح = {- ٤ ، ٢ }

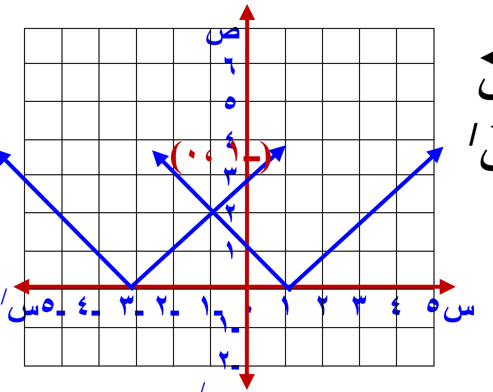
مثــ٢ـــال: حل المعادلة |س + ٢| + ٥ =٠

الحــــــــــل

|س+٢| = ـ ٥ وهذا مرفوض ∴ م.ح = ∅

مثــ٣ــال: حل المعادلة | س ـ ١ | =| س +٣| بيانياً وتحقق من الحل جرياً

الحـــــــــل



الدالة د(س) = |س ـ١ | إزاحة أفقية |١| فى اتجاه وس

والدالة ر(س) =|س +٣| إزاحة أفقية |٣| فى اتجاه وس/

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١ ، ٠)

∴ م.ح = { ـ ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : | س ـ١ | =| س + ٣| بتربيع الطرفين

⇐ س٢ ـ ٢ س +١ = س٢ + ٦س + ٩

⇐ ـ٢س ـ ١ = ٦س +٩ ⇐ ـ ٨ س = ٨

∴ س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١ }

مثــ٤ــال: حل المعادلة ٣ ـ | س | = ٢ | س | بيانياً وتحقق من الحل جرياً

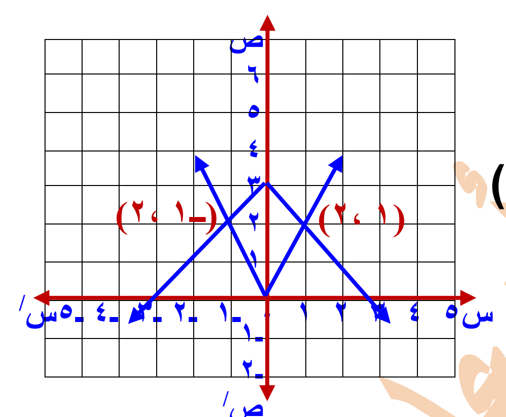
الحـــــــــل

الدالة د(س) = ٣ ـ |س | إنعكاس فى منحنى الدالة

، إزاحة رأسية |٣| فى اتجاه وص

والدالة ر(س) = ٢ |س| إنكماش فى تمثيل المنحنى

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١،٢) ، (٢،١)



∴ م.ح = { ـ ١ ، ١ }

الحل الجبرى : بإستخدام إعادة التعريف

المعادلة هى { ٣ ـ س = ٢س : س ≥ ٠ ، ٣ + س = ـ٢س : س < ٠ }

⇐ ٣ = ٣س أ، ٣ = ـ ٣س

⇐ س = ١ أ، س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١، ١ }

مثــ٥ــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : ٣ $\sqrt{س^2}$ ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠

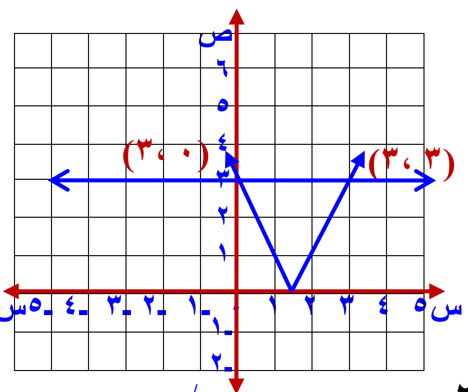
الحـــــــــل

٣ | س | ـ٢ | س | ـ ١ = ٠ ∴ | س | =١

∴ س = ± ١ ∴ م.ح = { ـ١، ١ }

مثـــ٦ـــال: حل المعادلة | ٢ س ـ ٣| = ٣ بيانياً وحقق الناتج جبرياً

الحـــــــــــل



الدالة د(س) = | ٢ س ـ ٣| إنكماش فى منحنى الدالة

،إزاحة أفقية | $\frac{٣}{٢}$ | فى اتجاه وس

والدالة ر(س) = ٣ دالة ثابتة توازى محور السينات

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (٣،٣) ، (٠،٣)

∴ م.ح = { ٣ ، ٠ }

الحل الجبرى: نضع المعادلة على الصورة : | ٢س ـ ٣| ـ٣ = ٠

نفرض أن د(س) = | ٢ س ـ ٣| ـ ٣

د (س) = { ٢س-٣-٣ : س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ ، -٢س+٣-٣ : س < $\frac{٣}{٢}$ } = { ٢س ـ٦ : س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ ، ـ ٢س : س < $\frac{٣}{٢}$ }

عندما س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ فإن: ٢س ـ ٦ =٠ ∴ س = ٣ تحقق

وعندما س < $\frac{٣}{٢}$ فإن : -٢س =٠ ∴ س =٠ تحقق

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى آخر

∵ | ٢ س ـ ٣| = ٣ ∴ (٢س-٣) = ± ٣

إما: ٢س-٣ = ٣ ومنها ٢س = ٦ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

أ،: ٢س-٣ = -٣ ومنها ٢س = ٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى ثالث

بتربيع الطرفين ∴ ٤س^{٢}-١٢س+٩ = ٩

∴ ٤س^{٢} ـ١٢س = ٠ ∴ ٤س(س-٣) = ٠

إما ٤س =٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

أ، س-٣ =٠ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

مثــ٧ــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{س^2}$ ـ ٢ | س | ـ ١ =٠

الحـــــــــــــل

∵ $\sqrt{س^2}$ = |س|

∴ | س |٢ـ ٥ | س | +٦ = ٠ ∴ (| س | -٢)(| س | -٣)=٠

إما | س | -٢=٠ ومنها |س| =٢ ومنها س= ±٢

أ، | س | -٣=٠ ومنها | س | =٣ ومنها س= ±٣

E مجموعة الحل = {-٢ ، ٢ ، -٣ ، ٣ }

مثــ٨ــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{س^2 ـ ٦س + ٩}$ =٤

الحـــــــــــــل

$\sqrt{س^2 ـ ٦س + ٩}$ =٤ ⇐ $\sqrt{(س ـ ٣)^2}$ =٤ وحيث $\sqrt{(س ـ ٣)^2}$ = | س ـ ٣|

⇐ | س ـ ٣| = ٤ ∴ (س ـ ٣) = ±٤

إما س ـ ٣=٤ ومنها س = ٧ تحقق المعادلة

أ، س -٣= ـ٤ ومنها س = ـ ١ تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٧ }

∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٢ ، -٣ ، ٣ }

مثــ٩ــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : |س +١|٢ ـ ٣ |س +١| ـ ١٠ = ٠

الحـــــــــــــل

بالتحليل: (|س +١| +٢) (|س +١| ـ ٥) = ٠

ومنها |س +١| +٢ = ٠ أ، |س +١| ـ ٥ = ٠

⇐ |س +١| = ـ ٢ مرفوض أ، |س +١| = ٥

∴ س + ١ =٥ عندما س ≥ ـ١ س = ٤ تحقق التعريف

أ، س + ١ = ـ ٥ عندما س < ـ١ س = ـ٦ تحقق التعريف

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ـ ٦ }

[٢] حل متباينات القيمة المطلقة :

الحل البيانى لمتباينة القيمة المطلقة

مثــال١: حل (أ) |س + ١| = ٣ ، (ب) |س + ١| < ٣ ، (جـ) |س + ١| > ٣ بيانياً

الحــــــــــل

(أ) نمثل الدالة د(س) = |س + ١|

والدالة ر(س) = ٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين

(٢ ، ٣) ، (-٤ ، ٣) ∴ م.ح = { -٤ ، ٢ }

(ب) حل المتباينة |س + ١| < ٣

هو]-٤ ، ٢[

(جـ) حل المتباينة |س + ١| > ٣

هو]-∞ ، -٤[∪]٢ ، ∞[أو ح - [-٤ ، ٢]

ملاحظة هامة :

(ب) حل المتباينة |س + ١| ≤ ٣

هو [-٤ ، ٢]

(جـ) حل المتباينة |س + ١| ≥ ٣

هو]-∞ ، -٤] ∪ [٢ ، ∞[أو ح -]-٤ ، ٢[

الحل الجبرى لمتباينة القيمة المطلقة

- إذا كان |س| < أ فإن - أ < س < أ ⟸ س ∈]- أ ، أ[
- إذا كان |س| > أ فإن س > أ ، س < - أ ⟸ س ∈ ح - [- أ ، أ]
- إذا كان |س| ≤ أ فإن - أ ≤ س ≤ أ ⟸ س ∈ [- أ ، أ]
- إذا كان |س| ≥ أ فإن س ≥ أ ، س ≤ - أ ⟸ س ∈ ح -]- أ ، أ[

مثـــ٢ـــال: حل المتباينة | س ـ ٣ | < ٥

الحـــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان | س | < م فإن ـ م < س < م ⇐ س ∈] ـ م ، م [

∵ | س ـ ٣ | < ٥ ∴ ـ ٥ < س ـ ٣ < ٥ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ ٢ < س < ٨

∴ س ∈] ـ٢ ، ٨ [

س َ ـ٢ ٨ س

مثـــ٣ـــال : حل المتباينة | ٣ ـ ٢س | ⩽ ٧

الحـــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان : | س | ⩽ م فإن – م ⩽ س ⩽ م ⇐ س ∈ [– م ، م]

∵ | ٢س - ٣ | ⩽ ٧ ∴ ـ ٧ ⩽ ٢س ـ ٣ ⩽ ٧ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ٧+٣ ⩽ ٢س ⩽ ٧ + ٣

∴ ـ٤ ⩽ ٢س ⩽ ١٠

∴ ـ ٢ ⩽ س ⩽ ٥ ∴ س ∈ [ـ٢ ، ٥]

س َ ـ٢ ٥ س

مثـــ٤ـــال: حل المتباينة | ٢ س + ١ | +٢ > ٧

الحـــــــــل

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | > م فإن س > م ، س < ـ م ⇐ س ∈ ح ـ] ـ م ، م [

∵ | ٢ س + ١ | +٢ > ٧ ∴ | ٢ س + ١ | > ٥

∴ ٢ س + ١ > ٥ أ، ٢ س + ١ < ـ ٥ بطرح (١)

∴ ٢ س > ٤ أ، ٢ س < ـ ٦

∴ س > ٢ أ، س < ـ ٣

∴ حل المتباينة س ∈ ح ـ] ـ ٣ ، ٢ [

س َ ـ٣ ٢ س

مثـــ٥ـــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | +٥ < ٤

الحــــــــــــل

∵ | ٣ س + ٢ | +٥ < ٤ ∴ | ٣ س + ٢ | +٥ < ـ١ مرفوضة

∴ حل المتباينة هو ∅

مثـــ٦ـــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | ≥ ٧

الحــــــــــــل

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | ≥ أ فإن س ≥ أ ، س ≤ ـ أ ⟸ س ∈ ح ـ] ـ أ ، أ [

∵ | ٣ س + ٢ | ≥ ٧

∴ ٣ س + ٢ ≥ ٧ أو ٣ س + ٢ ≤ ـ ٧ بطرح (٢)

∴ ٣ س ≥ ٥ أو ٣ س ≤ ـ ٩

∴ س ≥ ٥/٣ أو س < ـ٣

س' ـ٣ ٥/٣ س

∴ حل المتباينة س ∈ ح ـ] ـ٣ ، ٥/٣ [

مثـــ٧ـــال: حل المتباينة | ٣ ـ س | ≤ ٦

الحــــــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان : | س | ≤ أ فإن ـ أ ≤ س ≤ أ ⟸ س ∈ [ـ أ ، أ]

∵ | ٣ ـ س | ≤ ٦ ∴ ـ ٦ ≤ ٣ ـ س ≤ ٦ بطرح ٣ المتباينة

∴ ـ ٦ ـ ٣ ≤ ـ س ≤ ٦ ـ ٣

∴ ـ ٩ ≤ ـ س ≤ ٣ بالضرب × (ـ١) نعكس المتباينة

∴ ٩ ≥ س ≥ ـ٣

س' ـ٣ ٩ س

∴ حل المتباينة س ∈ [ـ٣ ، ٩]

ملاحظة: ممكن المتباينة | ٣ ـ س | ≤ ٦ تكتب | س ـ ٣ | ≤ ٦

مثـــ٨ـــال: حل المتباينة $\sqrt{س^2 - ١٠س + ٢٥} > ١$

الحـــــــــــــل

∵ $\sqrt{س^2 - ١٠س + ٢٥} = \sqrt{(س - ٥)^2} = |س - ٥|$ ⟸ المتباينة $|س - ٥| > ١$

القاعدة المستخدمة

إذا كان $|س| > م$ فإن $س > م$ ، $س < -م$ ⟸ $س ∈ ح - [-م ، م]$

إما $٢س - ٥ > ١$ أ، $٢س - ٥ < -١$ بجمع (٥) للمتباينة

∴ $٢س > ٦$ أ، $٢س < ٤$ بالقسمة على (٢)

∴ $س > ٣$ أ، ∴ $س < ٢$

∴ $س ∈ ح - [٢ ، ٣]$

مثـــ٩ـــال: حل المتباينة $|س - ٢| + |٤ - ٢س| ≤ ٦$

الحـــــــــــــل

∵ $|٤ - ٢س| = ٢|٢ - س| = ٢|س - ٢|$

المتباينة $|٢ - س| + |٤ - ٢س| ≤ ٦$ تكتب $٣|س - ٢| ≤ ٦$

المتباينة تكون $|س - ٢| ≤ ٢$

القاعدة المستخدمة إذا كان : $|س| ≤ م$ فإن $-م ≤ س ≤ م$ ⟸ $س ∈ [-م ، م]$

∵ $|س - ٢| ≤ ٢$ ∴ $-٢ ≤ س - ٢ ≤ ٢$ بجمع (٢) المتباينة

∴ صفر $≤ س ≤ ٤$

∴ حل المتباينة $س ∈ [٠ ، ٤]$

تمـــــارين

أكمل مايأتى:

(١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{1}{2}$ هى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى ....

(٣) مجموعة حل المتباينة |س − ٢| ≤ ٠ هى ....

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة ممايأتى:

(٤) |س − ٢| = ٣	(أ)]-١ ، ٥[
(٥) |س - ٢| < ٣	(ب) ع
(٦) |س − ٢| > -٣	(جـ) {-١ ، ٥}
(٧) |س - ٢| ≤ ٣	(د) ع - [-١ ، ٥]
(٨) |س -٢| > ٣	(هـ) ϕ
(٩) |س - ٢| = -٣	(و) [-١ ، ٥]

أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٠) |س + ٣| = ٦ (١١) |٢س - ٧| = ٥ (١٢) |٣ − ٢س| = ٧

(١٣) |س - ٣| = |س + ١| (١٤) |٢س + ١| = |س - ٣| (١٥) √(س٢ - ٢س + ١) = ٤

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٦) |س + ٤| = ٣ (١٧) |س - ١| = |س + ٣| (١٨) |٢س - ٥| = ٣

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

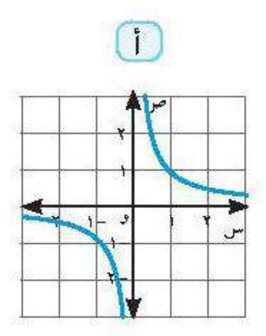
(١٩) |س - ١| < ٣ (٢٠) |س - ٢| ≤ ٥ (٢١) |س + ٣| > ٢

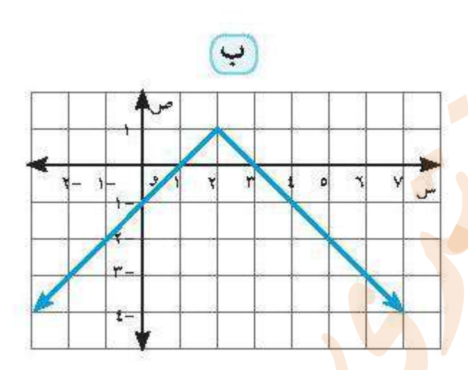
أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

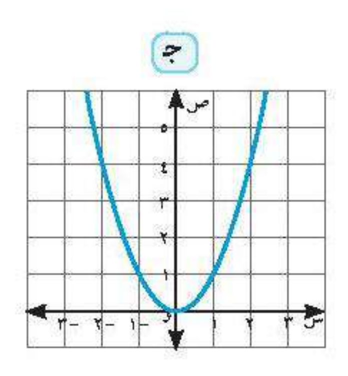
(٢٢) |٢س - ١| > ٣ (٢٣) |٢س + ٣| ≤ ٧ (٢٤) |٣س - ٧| ≥ ٢

تمـــارين عامة على الوحدة

(١) فى كل من الأشكال البيانية الآتية عين مدى الدالة، وابحث اطرادها ثم بين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

أ


ب


جـ


(٢) أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) $د_١(س) = ٢س^٣ + س + ٣$ ب) $د_٢(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٢س - ٣}$ جـ) $د_٣(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر بيانيًا ثم ابحث اطرادها:

أ) ر(س) = |س - ١| ب) ر(س) = ٢ - |س| جـ) ر(س) = |س + ٢| - ٣

(٤) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٢$ لتمثيل مايأتى بيانيًا:

أ) $ر_١(س) = س^٢ - ٣$ ب) $ر_٢(س) = ٢ - س^٢$ جـ) $ر_٣(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

(٥) استخدم منحنى الدالة د، حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل مايلي بيانيًا:

أ) $ر_١(س) = (س + ٣)^٣$ ب) $ر_٢(س) = -(س - ١)^٣$ جـ) $ر_٣(س) = (س - ١)^٣ - ٢$

ثم عين نقطة تماثل منحنى الدالة .

(٦) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ لتمثيل ما يلي بيانيًا:

أ) $د_١(س) = \frac{١}{س} + ١$ ب) $د_٢(س) = \frac{١}{س} - ٢$ جـ) $د_٣(س) = \frac{١}{س - ٢}$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًا .

أ) |س - ٥| = ٣ ب) |س - ٥| < ٣ جـ) |س + ٣| ≥ ٢

(٨) أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية جبريًا:

أ) |س - ٣| = ٤ ب) |٢س - ٣| = ٥ جـ) |٢س - ٥| ≤ ٧





الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- الأسس الكسرية
- الدالة الأسية وتطبيقتها
- المعادلات الأسية
- الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى
- بعض خواص اللوغاريتمات

الأسس الصحيحة

تعريف ١ ∀ س ∈ ع ، ن ∈ ص$^+$ فإن :

س^{ن} = س × س × س × ... إلى ن من العوامل.

مثال ١ س^{١٥} = س × س × س × ... إلى ١٥ عوامل

تعريف ٢ ∀ س ∈ ع* = ع − {٠} فإن س^{صفر} = ١

مثال ٢ (٣)^{صفر} = ١ ، (−٢)^{صفر} = ١ ، − (١٣)^{صفر} = −١

تعريف ٣ ∀ س ∈ ع − {٠} ، ن ∈ ص$^+$ فإن س$^{-ن}$ = $\frac{١}{س^{ن}}$

مثال ٣ س$^{-٥}$ = $\frac{١}{س^{٥}}$

قوانين الأسس الصحيحة.

∀ م ، ن ، ك ∈ ص فإن :

(١) س^{م} × س^{ن} = س$^{م+ن}$ ∀ س ∈ ع .

(٢) س^{م} ÷ س^{ن} = س$^{م-ن}$ ∀س ∈ ع − {٠}.

(٣) (س^{م})^{ن} = س$^{م×ن}$ ∀س ∈ ع .

(٤) (س^{م} × س^{ن})^{ك} = س^{مك} × س^{نك} ∀ س ، ص ∈ ع.

(٥) ($\frac{س^{م}}{س^{ن}}$)^{ك} = $\frac{س^{مك}}{س^{نك}}$ ∀س ∈ ع ، ص ∈ ع − {٠} .

مثال ١: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٦٤)^{٣} × (٢٧)^{٤}}{(١٤٤)^{٥}}$

الحل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٦}]^{٣} × [(٣)^{٣}]^{٤}}{[(٢)^{٤} × (٣)^{٢}]^{٥}}$ = $\frac{(٢)^{١٨} × (٣)^{١٢}}{(٢)^{٢٠} × (٣)^{١٠}}$ = $\frac{(٣)^{٢}}{(٢)^{٢}}$ = $\frac{٩}{٤}$

مثـــ٢ــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٤)^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{(٨)^{ن+٢}}$

الحـــــــــــل

المقدار $= \frac{[(٢)^{٢}]^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{[(٢)^{٣}]^{ن+١}} = \frac{(٢)^{٤ن+٢} \times (٢)^{١-ن}}{(٢)^{٣ن+٣}}$

$= (٢)^{٤ن+٢+١-ن-٣ن-٣} = (٢)^{صفر} = ١$

مثـــ٣ــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(١٢)^{٢} \times (٨١)^{-٢}}{١٦ \times (٢٧)^{-٣}}$

الحـــــــــــل

المقدار $= \frac{[(٢)^{٢} \times ٣]^{٢} \times [(٣)^{٤}]^{-٢}}{(٢)^{٤} \times [(٣)^{٣}]^{-٣}} = \frac{(٢)^{٤} \times (٣)^{٢} \times (٣)^{-٨}}{(٢)^{٤} \times (٣)^{-٩}}$

$= (٣)^{٢-٨+٩} = (٣)^{٣} = ٢٧$

الجذر النونى : للعدد أ هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن) ويرمز للجذر النونى للعدد أ بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى ن دليل الجذر [$\sqrt[ن]{أ}$ = س إذا كان $س^{ن}$ = أ]

ملاحظات:

المعادلة: $س^{ن}$ = أ لها ن من الجذور وإذا كان

(١) ن عدد زوجى ، أ > ٠ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما: ن >٢) [$\sqrt[٤]{٢٥} = \pm ٥$]

(٢) ن عدد زوجى ، أ < ٠ ليس لها جذور حقيقية أى أن الجذور أعداد مركبة غير حقيقية [حل: $س^{٢} = -٦٤$ هو س = $\sqrt{\pm ٦٤} = \pm ٤ت$]

(٣) ن عدد فردى ، أ ∈ ع - {٠} لها جذر حقيقى وحيد وباقى الجذور أعداد مركبة [حل: $س^{٣} = -٢٧$ هو س = $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ وجزرين مركبين]

مثــ٤ــال: مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{٧} = ١٢٨$ فى ح

الحـــل: ∴ $(س - ٣) = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$ س - ٣ = ٢ ∴ م.ح = {٥}

مثــ٥ــال: مجموعة حل المعادلة $٣ س^{٤} - ٥ = ٢٣٩$ فى ح

الحـــل: $٣ س^{٤} = ٢٣٩ + ٥ = ٢٤٣$ ⇐ $س^{٤} = ٢٤٣ \div ٣ = ٨١$

∴ $س = \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$ ∴ م.ح = {-٣ ، ٣}

مثــ٦ــال: مجموعة حل المعادلة $س^{٣} = -٦٤$ فى ح

الحـــل: ∴ $س = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$ ∴ م.ح = {-٤}

مثــ٧ــال: مجموعة حل المعادلة $س^{٤} = -٦٢٥$ فى ح

الحـــل: -٦٢٥ < ٠ ، القوة ٤ زوجى ∴ م.ح = ∅

الأسس الكسرية

تعريف ١ : $س^{\frac{١}{ن}} = ص$ ⇐ $س = ص^{ن}$ حيث س ، ص ∈ $ع^{+}$ ويكون $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

فمثلاً: $(١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ ، $(١٢٨)^{\frac{١}{٧}} = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$

تعريف ٢ : إذا كان س ∈ $ع^{+}$ ، م ∈ ص ، ن عدد صحيح أكبر من الواحد.

فإن $س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$

ملاحظة: $\sqrt[ن]{س^{م}} = \sqrt[ن ك]{س^{م ك}}$

فمثلاً: $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = (٣)^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

ملاحظات : * إذا كان أ ∈ $ع^{-}$: فإن $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ∈ ع إذا كان ن عدداً فردياً

$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$ إذا كان ن عدداً زوجياً

فمثلاً: $(-٢٥)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٢٥} \notin ع$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣ \in ع$

* إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن: $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى
* إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن: $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

استخدام المقياس : $\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان ن عدد زوجى ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن عدد فردى

مثــ١ــال : أوجد فى أبسط صورة

(أ) $\sqrt[٥]{(٢-\sqrt{٥})^٥}$ (ب) $\sqrt[٤]{(٢-\sqrt{٣})^٤}$ (جـ) $\sqrt[٦]{(١-\sqrt{٧})^٦}$

الحــــــــل

(أ) $\sqrt[٥]{(٢-\sqrt{٥})^٥} = (٢-\sqrt{٥})$: القوى عدداً فردياً

(ب) $\sqrt[٤]{(٢-\sqrt{٣})^٤} = |٢-\sqrt{٣}| = ٢-\sqrt{٣}$: $\sqrt{٣} < ٢$

(جـ) $\sqrt[٦]{(١-\sqrt{٧})^٦} = |١-\sqrt{٧}| = \sqrt{٧}-١$: $\sqrt{٧} > ١$

مثــ٢ــال : أوجد فى أبسط صورة

(أ) $\sqrt[٥]{٣٢ أ^٥ ب^{١٠}}$ (ب) $-\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^{١٢}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{(٧+\frac{١}{٧})^٦}$

الحــــــــل

(أ) $\sqrt[٥]{٣٢ أ^٥ ب^{١٠}} = \sqrt[٥]{٣٢} \times \sqrt[٥]{أ^٥} \times \sqrt[٥]{ب^{١٠}} = ٢ أ ب^٢$

(ب) $-\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^{١٢}} = -\sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^{١٢}} = -٣ س ص^٣$

(جـ) $\sqrt[٣]{(٧+\frac{١}{٧})^٦} = (٧+\frac{١}{٧})^٢ = (٧)^٢ + ٢ + (\frac{١}{٧})^٢ = ٥١ + (\frac{١}{٧})^٢ = ٥١\frac{١}{٤٩}$

مثــ٣ــال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢ أ^٢ ب^{-٤})^٤ \times (٥ أ ب^{-٧})^{-٢}}{(٤ أ^{-٣} ب)^{-٢}}$

الحــــــــل

$$المقدار = \frac{٢^٤ \times أ^٨ \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times أ^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢^٢)^{-٢} \times أ^٦ \times ب^{-٢}}$$

$$= \frac{٢^٤ \times أ^٨ \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times أ^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢)^{-٤} \times أ^٦ \times ب^{-٢}}$$

$$= (٢)^{٤+٤} \times (٥)^{-٢} \times أ^{٨-٢-٦} \times ب^{-١٦+١٤+٢} = \frac{٢٥٦}{٢٥} \times أ^{٠} \times ب^{٠} = \frac{٢٥٦}{٢٥}$$

مثـ٤ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٦)^{٤ن} \times (٥)^{٧ن}}{(١٥)^{٤ن} \times (١٠)^{٣ن}}$

الحـــــــل

$$المقدار = \frac{(٢ \times ٣)^{٤ن} \times (٥)^{٧ن}}{(٣ \times ٥)^{٤ن} \times (٢ \times ٥)^{٣ن}} = \frac{٢^{٤ن} \times ٣^{٤ن} \times ٥^{٧ن}}{٣^{٤ن} \times ٥^{٤ن} \times ٢^{٣ن} \times ٥^{٣ن}}$$

$$= (٥)^{٧ن - ٥ن - ٣ن} \times (٣)^{٤ن - ٤ن} \times (٢)^{٤ن - ٣ن} = (٥)^{٠} \times (٣)^{٠} \times (٢)^{ن} = (٢)^{ن}$$

مثـ٥ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢)^{١-٢ن} \times (٤٣٢)^{ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times (١٢)^{ن-١}}$

الحـــــــل

$$المقدار = \frac{(٢)^{١-٢ن} \times (٢^{٤} \times ٣^{٣})^{ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times (٢^{٢} \times ٣)^{ن-١}}$$

$$= \frac{(٢)^{١-٢ن} \times ٢^{٤ن} \times ٣^{٣ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times ٢^{٢ن-٢} \times ٣^{ن-١}}$$

$$= (٢)^{١-٢ن+٤ن-٢ن+٢} \times (٣)^{٣ن-ن-ن+٤-ن+١}$$

$$= (٢)^{٣} \times (٣)^{٥} = ٨ \times ٢٤٣ = ١٩٤٤$$

مثـ٦ـال: أثبت أن : $\frac{(١٦)^{س-\frac{١}{٤}} \times (٩)^{س+\frac{١}{٢}}}{(٨)^{س-١} \times (١٨)^{س+٢}} = \frac{١}{٢٧}$

الحـــــــل

$$المقدار = \frac{((٢)^{٤})^{س-\frac{١}{٤}} \times ((٣)^{٢})^{س+\frac{١}{٢}}}{((٢)^{٣})^{س-١} \times (٢ \times (٣)^{٢})^{س+٢}} = \frac{(٢)^{٤س-١} \times (٣)^{٢س+١}}{(٢)^{٣س-٣} \times (٣)^{٢س+٤} \times (٢)^{س+٢}}$$

$$= (٢)^{٤س-١-٣س+٣-س-٢} \times (٣)^{٢س+١-٢س-٤} = (٢)^{٠} \times (٣)^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$$

مثـ٧ـال اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{5 \times (3)^{2\text{س}} - 7\,(3)^{2\text{س}-1}}{(3)^{2\text{س}+2} + (3)^{2\text{س}-1}}$

الحـــــــــــل

المقدار $= \dfrac{5 \times (3)^{2\text{س}} - 7\,(3)^{2\text{س}} \times (3)^{-1}}{(3)^{2\text{س}} \times (3)^{2} + (3)^{2\text{س}} \times (3)^{-1}} = \dfrac{(3)^{2\text{س}}\,(5 - \frac{7}{3})}{(3)^{2\text{س}}\,(9 + \frac{1}{3})}$

بضرب البسط والمقام × ٣ ينتج $= \dfrac{15 - 7}{27 + 1} = \dfrac{8}{28} = \dfrac{2}{7}$

مثـ٨ـال اختصر: $(\text{أ}^{\frac{1}{2}}\ \text{ب}^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}} \times (\text{ب}^{-\frac{4}{27}}\ \text{ج}^{\frac{2}{3}})^{3} \times (\text{ج}^{2}\ \text{أ}^{\frac{7}{3}})^{-1}$

الحـــــــــــل

المقدار $= \text{أ}^{\frac{2}{3}}\ \text{ب}^{\frac{4}{9}} \times \text{ب}^{-\frac{4}{9}}\ \text{ج}^{2} \times \text{ج}^{-2}\ \text{أ}^{-\frac{7}{3}} = \text{ب}^{0} \times \text{ج}^{0} \times \text{أ}^{-\frac{5}{3}} = \text{أ}^{-\frac{5}{3}}$

مثـ٩ـال: أثبت أن : $(18)^{\frac{3}{2}} \times (225)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{12})^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$

الحـــــــــــل

الطرف الأيمن $= (2 \times (3)^{2})^{\frac{3}{2}} \times ((3)^{2} \times (5)^{2})^{-\frac{1}{2}} \times ((2)^{-1} \times (3)^{-2})^{\frac{1}{2}}$

$= (2)^{\frac{3}{2}} \times (3)^{3} \times (3)^{-1} \times (5)^{-1} \times (2)^{-\frac{1}{2}} \times (3)^{-1}$

$= (2)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \times (3)^{3-1-1} \times (5)^{-1} = (2)^{1} \times (3)^{1}\ (5)^{-1} = \frac{6}{5}$

مثـ١٠ـال رتب تصاعدياً $\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt[4]{8}$

الحـــــــــــل

المضاعف المشترك الأدنى للأعداد ٣ ، ٢ ، ٤ هو ١٢ نحول الجذور للدليل ١٢

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{(5)^{4}} = \sqrt[12]{625}$

$\sqrt{3} = \sqrt[12]{(3)^{6}} = \sqrt[12]{729}$

$\sqrt[٤]{٨} = \sqrt[١٢]{(٨)^{٣}} = \sqrt[١٢]{٥١٢}$

الترتيب هو $\sqrt[١٢]{٥١٢}$ ، $\sqrt[١٢]{٦٢٥}$ ، $\sqrt[١٢]{٧٢٩}$ هو $\sqrt[٤]{٨}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt{٣}$

مثـ١١ـال حل المعادلة $\text{س}^{٣} = ١٢٥$

الحـــــــــــل

$\text{س} = \sqrt[٣]{١٢٥} = [(٥)^{٣}]^{\frac{١}{٣}} = ٥$ ∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٢ـال حل المعادلة : $\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٥}} = ٣٢$

الحـــــــــــل

$(\text{س} - ١)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ \Leftarrow (\text{س} - ١) = [(٢)^{٥}]^{\frac{٣}{٥}} = (٢)^{٣} = ٨$

∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٣ـال حل المعادلة : $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ٥\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$

الحـــــــــــل

$(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١)(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$ أ، $(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ١ \Leftarrow \text{س} = (١)^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ س = ١

أ، $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٤ \Leftarrow \text{س} = [(٢)^{٢}]^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\text{س} = (٢)^{٣} = ٨$ ∴ م.ح = { ١ ، ٨ }

مثـ١٤ـال حل المعادلة $\sqrt[٥]{١٦} \times (٤)^{\text{س} - \frac{١}{٥}} = ٢$

الحـــــــــــل

المعادلة $(٢^{٤})^{\frac{١}{٥}} \times (٢^{٢})^{\text{س} - \frac{١}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{\frac{٤}{٥}} \times (٢)^{٢\text{س} - \frac{٢}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{٢\text{س} + \frac{٢}{٥}} = (٢)^{١}$ ∴ $٢\text{س} + \frac{٢}{٥} = ١$ ∴ $٢\text{س} = ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$

بضرب كل من الطرفين × $\frac{١}{٢}$ ∴ م.ح = س = $\frac{٣}{١٠}$

مثـ١٥ـال حل المعادلة $(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحــــــــل

$(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = ((٣)^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

$\therefore (\text{س} - \frac{١}{٢}) = [(٣)^{-١}]^{٣} = (٣)^{-٣}$ $\therefore (\text{س} - \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢٧}$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢٧} = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثـ١٦ـال إذا كان $\text{س}^{\frac{٣}{٤}} = ٢\,\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ فأوجد قيمة: س ـ ١٠ ص

الحــــــــل

$\text{س}^{\frac{٣}{٤}} = ٦٤$ $\therefore (\text{س})^{\frac{٣}{٤}} = (٢)^{٦} \Leftarrow \text{س} = [(٢)^{٦}]^{\frac{٤}{٣}} = (٢)^{٨} = ٢٥٦$

$٢\,\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ $\therefore \text{ص}^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ = (٢)^{٥}$ $\therefore \text{ص} = [(٢)^{٥}]^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

$\therefore \text{س} - ١٠\,\text{ص} = ٢٥٦ - ١٠ \times ٨ = ٢٥٦ - ٨٠ = ١٧٦$

مثـ١٧ـال أختصر لأبسط صورة : $\dfrac{(٤٩)^{٣\text{س} + \frac{١}{٤}} \times (\sqrt{١٦})^{٣\text{س} - \frac{١}{٣}}}{(\sqrt[٣]{٤})^{٩\text{س} - ١} \times (٣٤٣)^{٢\text{س} + \frac{١}{٢}}}$

الحــــــــل

$$\text{المقدار} = \frac{[(٧)^{٢}]^{٣\text{س} + \frac{١}{٤}} \times [(٢)^{٢}]^{٣\text{س} - \frac{١}{٣}}}{[(٢)^{\frac{٢}{٣}}]^{٩\text{س} - ١} \times [(٧)^{٣}]^{٢\text{س} + \frac{١}{٢}}} = \frac{(٧)^{٦\text{س} + \frac{١}{٢}} \times (٢)^{٦\text{س} - \frac{٢}{٣}}}{(٢)^{٦\text{س} - \frac{٢}{٣}} \times (٧)^{٦\text{س} + \frac{٣}{٢}}}$$

$$= (٧)^{٦\text{س} + \frac{١}{٢} - ٦\text{س} - \frac{٣}{٢}} = (٧)^{-١} = \frac{١}{٧}$$

مثـال ١٨ أختصر لأبسط صورة :

$$\frac{(٦٢٥)^{\frac{٣}{٤}س} \times (٢٧)^{س - \frac{١}{٣}}}{(٢٢٥)^{\frac{٣}{٢}س} \times \sqrt[٣]{١٢٥}}$$

الحـــــــــــل

$$\text{المقدار} = \frac{[(٥)^{٤}]^{\frac{٣}{٤}س} \times [(٣)^{٣}]^{س - \frac{١}{٣}}}{[(٣)^{٢} \times (٥)^{٢}]^{\frac{٣}{٢}س} \times ٥} = \frac{(٥)^{٣س} \times (٣)^{٣س - ١}}{(٣)^{٣س} \times (٥)^{٣س} \times ٥}$$

$$= (٣)^{٣س - ١ - ٣س} \times (٥)^{-١} = (٣)^{-١} \times (٥)^{-١} = \frac{١}{١٥}$$

تمـــــــارين

١ أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:

أ) $(١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ ب) $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ج) $٢٧^{-\frac{٤}{٣}}$

د) $(\frac{١}{٨})^{\frac{٢}{٣}} + (\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}}$ هـ) $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{\sqrt{٢}}$ و) $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}})^{-٢}}$

٢ أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية:

أ) $(أ^{-\frac{٢}{٣}})^{-٣}$ ب) $\sqrt[٣]{س} \times س^{\frac{١}{٣}}$ ج) $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

د) $(س^{\frac{١}{٢}} + ص^{\frac{١}{٢}})(س^{\frac{١}{٢}} - ص^{\frac{١}{٢}})$ هـ) $(س^{\frac{١}{٣}} - ص^{\frac{١}{٣}})(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}}ص^{\frac{١}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}})$

٣ اختصر كُلًّا ممايأتى لأبسط صورة :

أ) $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ ب) $(\frac{١٦}{٨١})^{\frac{١}{٤}} \times (\frac{٧٢٩}{٨})^{\frac{١}{٣}}$ ج) $(١٦)^{\frac{٣}{٤}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$

د) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ هـ) $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[٣]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ و) $\frac{١٦^{س - \frac{١}{٤}} \times ٩^{س + \frac{١}{٢}}}{٨^{س - ١} \times ١٨^{س + ٢}}$

الدالــة الأسـية

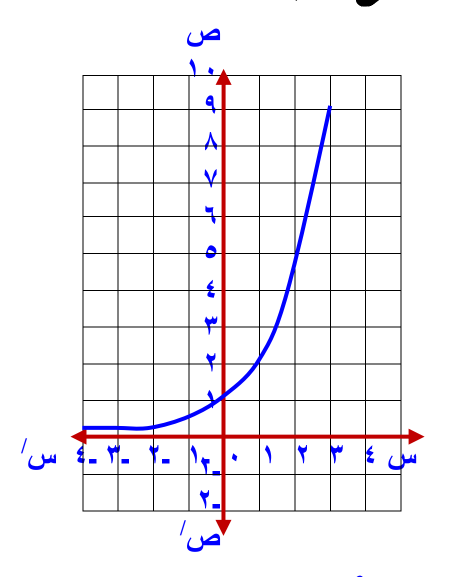
تعريف. إذا كان أ ∈ ع⁺ـ {١} فإن الدالة د : ع ← ع⁺ حيث د(س) = أ^س^ تسمى دالة أسية أساسها أ .

التمثيل البيانى للدالة الأسية

إذا كانت: أ عدداً حقيقياً موجباً ≠ ١ فإن الدالة د : ع ⟵ ع⁺ حيث د (س) = أ^س^ تسمى دالة أسية أساسها أ

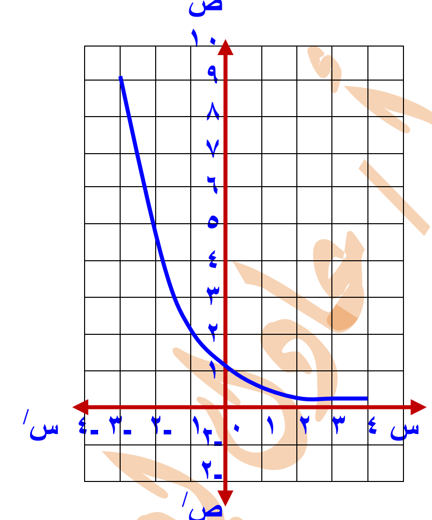
خواص الدالة الأسية

(١) إذا كانت : أ > ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
المجال = ع
المدى = ع₊ أى] ٠ ، ∞ [
الدالة تزايدية على ع
الدالة ليست زوجية وليست فردية
المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(٢) إذا كانت: ٠ < أ < ١



المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
المجال = ع
المدى = ع₊ أى] ٠ ، ∞ [
الدالة تناقصية على ع
الدالة ليست زوجية وليست فردية
المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

ملاحظة: إذا كانت د(س) = أ^س^ فإن المنحنى ص = د (س + ب) أى ص = أ^س + ب^

يمثله ص = أ^س^ بإزاحة أفقية مقدارها |ب|

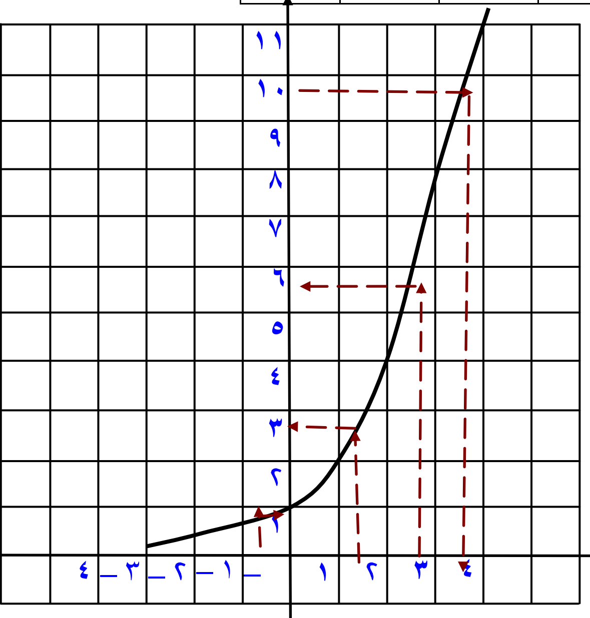
فى اتجاه و س⃖ إذا كان : ب > ٠ ، فى اتجاه و س/⃖ إذا كان : ب < ٠

مثـ١ـال : أرسم منحنى الدالة د (س) = (٢)^{س} في الفترة [ـ ٣ ، ٤] و من الرسم

أوجد : ⓐ د (ـ٥,٠) ⓑ د (١,٥) ⓒ قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٣٢}$

الحـــــــل

س	٤	٣	٢	١	٠	١ـ	٢ـ	٣ـ
ص	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



لإيجاد قيمة د (ـ ٥,٠) :

نرسم مستقيماً عند ـ٥,٠ يوازى محور الصادات

ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها ـ ٧,٠

∴ د (ـ٥,٠) ≃ ٧,٠

لإيجاد قيمة د (١,٥) نرسم كما سبق

نجد أن : د (١,٥) ـ ٢,٨

لإيجاد قيمة $\sqrt{٣٢}$ نلاحظ أن: ٣٢ = (٢)^{٥}

∴ نوجد د ($\frac{٥}{٢}$) = د (٢ $\frac{١}{٢}$)

و نرسم كما فى السابق ∴ قيمة $\sqrt{٣٢}$ ≃ ٥,٧

مثـ٢ـال ارسم منحنى الدالة د : ع ⟵ ع$^{+}$ حيث د(س) = (٣)^{س} ومن الرسم أوجد :

ⓐ د(١,٥) ⓑ قيمة س إذا كان: (٣)^{س} = ٨ ⓒ $\sqrt{٣}$

س	٣	٢	١	٠	١ـ	٢ـ	٣ـ
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

المجال ع ، المدى ع$^{+}$ ، متزايدة على مجالها

ⓐ د(١,٥) =(٣)^{١,٥} ≃ ٥,٢

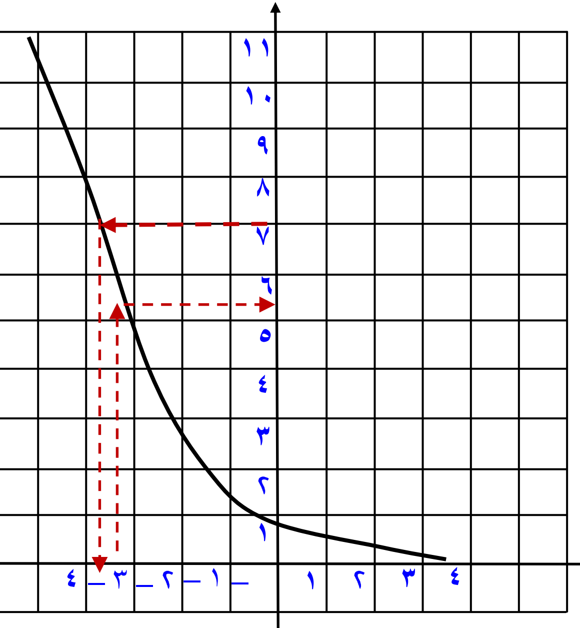
ⓑ س ≃ ١,٩

ⓒ $\sqrt{٣}$ =(٣)^{٠,٥} ≃ ١,٧

مثـ٣ـال : أرسم منحنى الدالة د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س + ١}$ في الفترة [ـ٣، ٤] و من الرسم

أوجد : (أ) د (ـ٥,٣) (ب) $\sqrt[٤]{٢}$ (جـ) حل المعادلة د (س) = ٧

الحـــــــل



س	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣	ـ٤
ص	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

من الرسم : د (ـ٥,٣) ≃ ٥,٣

القيمة التقريبية للعدد ≃ $\sqrt[٤]{٢}$

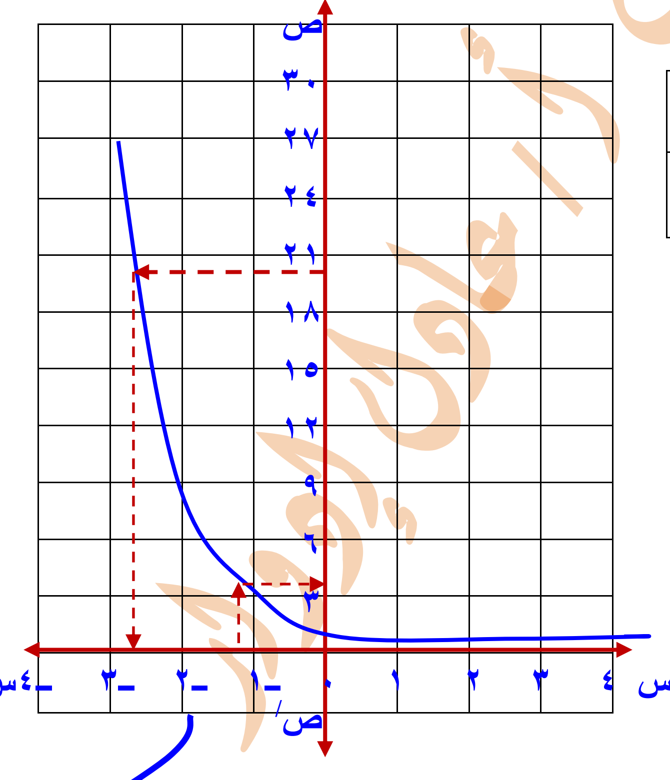
قيمة س عندما د(س) = ٧

س ≃ ـ ٢,٨ تقريباً

مثـ٤ـال ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح$^+$ حيث د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ومن الرسم أوجد

(أ) د(-٢,١) (ب) قيمة س إذا كان: د(س) = ٢٠

الحـــــــل



س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

المجال ح ، المدى ح$^+$

، تناقصية على مجالها

(أ) د(-٢,١) ≃ ٣,٧

(ب) د(س) = ٢٠ من الرسم ≃ ـ ٢,٨

مثـال ٥ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٢)^{\text{س}}$ فأثبت أن : $\dfrac{\text{د}(\text{س}+٥) + \text{د}(\text{س}+٣)}{\text{د}(\text{س}+٣) + \text{د}(\text{س})} = \dfrac{٤٠}{٩}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(٢)^{\text{س}+٥} + (٢)^{\text{س}+٣}}{(٢)^{\text{س}+٣} + (٢)^{\text{س}}} = \dfrac{(٢)^{\text{س}+٣}[(٢)^{٢} + ١]}{(٢)^{\text{س}}[(٢)^{٣} + ١]}$

$= \dfrac{(٢)^{٣}[٤ + ١]}{[٨ + ١]} = \dfrac{٨ \times ٥}{٩} = \dfrac{٤٠}{٩}$

مثـال ٦ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٣)^{٣\text{س}-١}$ فأثبت أن : $\dfrac{\text{د}(\text{س}+١) \times \text{د}(\text{س}+٢)}{\text{د}(\text{س}+٣)} = \text{د}(\text{س})$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(٣)^{٣\text{س}-١+١} \times (٣)^{٣\text{س}-١+٢}}{(٣)^{٣\text{س}-١+٣}} = \dfrac{(٣)^{٣\text{س}} \times (٣)^{٣\text{س}+١}}{(٣)^{٣\text{س}+٢}}$

$= \dfrac{(٣)^{٦\text{س}+١}}{(٣)^{٣\text{س}+٢}} = (٣)^{٦\text{س}+١-٣\text{س}-٢} = (٣)^{٣\text{س}-١} = \text{د}(\text{س})$ الأيسر

مثـال ٧ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٢)^{\text{س}}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = (\frac{١}{٢})^{\text{س}}$ فأوجد قيمة : $\dfrac{\text{د}(\frac{٥}{٢}) - \text{ر}(-٢)}{\text{د}(\frac{٣}{٢}) - \text{ر}(-١)}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-١}} = \dfrac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (٢)^{٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (٢)}$

$= \dfrac{(٢)^{٢}[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]}{(٢)[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]} = ٢$

مثـال ٨ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٥)^{\text{س}}$ فأثبت أن : $\dfrac{\text{د}(\text{س}+٤) - \text{د}(\text{س}+٣)}{\text{د}(\text{س}+٥) - \text{د}(\text{س}+٤)} = \dfrac{٤٠}{٩}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(٥)^{\text{س}+٤} - (٥)^{\text{س}+٣}}{(٥)^{\text{س}+٥} - (٥)^{\text{س}+٤}} = \dfrac{(٥)^{\text{س}+٣}[(٥) - ١]}{(٥)^{\text{س}+٣}[(٥)^{٢} - ٥]} = \dfrac{٥ - ١}{٢٥ - ٥} = \dfrac{١}{٥}$

تطبيقات على الدالة الأسية:

[١] النمو الأسى : الدالة د: د(ن) = أ (١ + ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر النسبة المئوية ، ن الفترة الزمنية

الربح المركب: عند حساب جملة مبلغ (جـ) لمبلغ (أ) فى أحدى البنوك بربح سنوى ر المبلغ تعطى بالعلاقة

$$جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

[٢] التضاؤل الأسى: الدالة د: د(ن) = أ (١ـ ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر نسبة التضاؤل ، ن الفترة الزمنية

مثـ٩ـال : أودع رجل مبلغ ٢٠٠٠ جنية فى أحدى البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة ٧٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كلاً من الحالات الآتية:

(أ) العائد السنوى (ب) العائد النصف سنوى (جـ) العائد شهرى

الحـــــــــل

(أ) ∵ العائد السنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

$$∴ جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{١}\right)^{١٠} = ٣٩٣٤,٣ \text{ جنية}$$

(ب) ∵ العائد نصف سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٢ ∴ س = ٢

$$∴ جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{٢}\right)^{١٠×٢} = ٣٩٧٩,٦ \text{ جنية}$$

(جـ) ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

$$∴ جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠×١٢} = ٤٠١٩,٣ \text{ جنية}$$

مثـ١٠ـال : السعر السوقى لسيارة يتناقص طبقاً للعلاقة س = ١٦٠٠٠٠(٠,٩٥)^ن حيث س سع السيارة بالجنية ، ن الزمن بالسنةات أوجد :

(أ) سعر السيارة عند شرائها الجديدة (ب) سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات

الحـــــــــل

(أ) سعر السيارة عند شرائها الجديدة = ١٦٠٠٠٠(٠,٩٥)^٠ = ١٦٠٠٠٠جنية

(ب) سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات = ١٦٠٠٠٠(٠,٩٥)^٥ = ١٢٣٨٠٤,٩٥جنية

حل المعادلات الأسية جبرياً

(١) إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن: ن = ٠ ، أ ∈ ع − {-١، ٠، ١}.

(٢) إذا كان : $أ^{ن} = أ^{م}$ فإن: ن = م ، أ ∈ ع − {-١، ٠، ١}.

(٣) إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$
- فإن: أ = ب ، ن عدد فردى
- فإن: أ = ± ب ، ن عدد زوجي
- إذا كان : أ ≠ ب فإن: ن = ٠

مثـــ١ــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $(٣)^{٢س - ٥} = ٢٤٣$ فى ع

الحـــــــــل

$(٧)^{٢س-٥} = ٢٤٣ = (٣)^{٥}$ ∴ ٢س ـ ٥ = ٥ ∴ س = ٥

مثـــ٢ــال: اوجد مجموعة حل المعادلة $(١+ س)^{٤} = ١٠٠٠٠$ فى ع

الحـــــــــل

$(١+ س)^{٤} = (± ١٠)^{٤}$ ∴ ١+ س = ±١٠

إما ١+ س = ١٠ ∴ س = ٩ أ، ١+ س = ـ ١٠

∴ س = - ١١ ∴ م.ح = {٩ ، ـ١١}

مثـ٣ـال إذا كان د(س) =$(٢)^{س}$ وكانت د(٢س + ١) ــ د(٢س - ١) = ١٢ فأوجد قيمة س

الحـــــــــل

$(٢)^{٢س + ١} - (٢)^{٢س - ١} = ١٢$

∴ $٢^{٢س - ١}(٢^{٢} - ١) = ١٢$

∴ $٢^{٢س - ١} × ٣ = ١٢$ ∴ $٢^{٢س - ١} = ٤ = (٢)^{٢}$

∴ ٢ س-١=٢ ∴ ٢ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

مثـ٤ـال حل المعادلة $٩^{س} + ٣^{٢س - ١} = ١٢$

الحـــــــــل

$٣^{٢س} + ٣^{٢س - ١} = ١٢$ ⇐ $٣^{٢س - ١}(٣+١) = ١٢$

⇐ $٣^{٢س - ١} × ٤ = ١٢$ ⇐ $٣^{٢س - ١} = ٣$

∴ ٢س - ١=١ ∴ ٢س =٢ ∴ س =١

مثـ٥ـال حل المعادلة: $٤^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

الحـــــل

$٤^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$ $\therefore$ $(٢^{٢})^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٨)(٢^{س} - ١) = ٠$

إما $٢^{س} - ٨ = ٠$ $\Leftarrow$ $٢^{س} = ٢^{٣}$ $\therefore$ $س = ٣$

أو $٢^{س} - ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $٢^{س} = ١$ $\therefore$ $س = ٠$

مثـ٦ـال حل المعادلة $(\sqrt[٣]{س})^{٢} - ٤ \sqrt[٣]{س} = -٣$

الحـــــل

$س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ س^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$ $\therefore$ $(س^{\frac{١}{٣}} - ١)(س^{\frac{١}{٣}} - ٣) = ٠$

إما $س^{\frac{١}{٣}} = ١$ $\therefore$ $س = ١$

أو $س^{\frac{١}{٣}} = ٣$ $\therefore$ $(س^{\frac{١}{٣}})^{٣} = (٣)^{٣}$ $\therefore$ $س = ٢٧$

مثـ٧ـال حل المعادلة $(٥)^{س} + (٥)^{٣-س} = ٣٠$

الحـــــل

$(٥)^{س} + (٥)^{٣-س} = ٣٠$ بالضرب $\times (٥)^{س}$

$\therefore (٥)^{٢س} + (٥)^{٣} = ٣٠ \times (٥)^{س}$

$\therefore (٥)^{٢س} - ٣٠ \times (٥)^{س} + ١٢٥ = ٠$

$\therefore [(٥)^{س} + ٥][(٥)^{س} - ٢٥] = ٠$

إما $(٥)^{س} - ٥ = ٠$ $\Leftarrow$ $(٥)^{س} = ٥$ $\therefore$ $س = ١$

أو $(٥)^{س} - ٢٥ = ٠$ $\Leftarrow$ $(٥)^{س} = ٢٥ = (٥)^{٢}$ $\therefore$ $س = ٢$

مثـ٨ـال حل المعادلة $(٣)^{٢س - ١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$

الحـــــــــــل

$(٣)^{٢س - ١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ بالضرب ×٣

∴ $(٣)^{٢س} - ٣٠ \times (٣)^{س} + ٨١ = ٠$ ⟸ $[\,(٣)^{س} - ٢٧\,]\,[\,(٣)^{س} - ٣\,] = ٠$

إما $(٣)^{س} - ٢٧ = ٠$ ⟸ $(٣)^{س} = ٢٧ = (٣)^{٣}$ ∴ س = ٣

أ، $(٣)^{س} - ٣ = ٠$ ⟸ $(٣)^{س} = ٣$ ∴ س = ١

مثـ٩ـال حل المعادلة $(٥)^{س + ١} + (٥)^{-س} = ٦$

الحـــــــــــل

$٥ \times (٥)^{س} + \frac{١}{(٥)^{س}} = ٦$ بالضرب × $(٥)^{س}$

∴ $٥ \times (٥)^{٢س} + ١ = ٦(٥)^{س}$

∴ $٥ \times (٥)^{٢س} - ٦ \times (٥)^{س} + ١ = ٠$ ∴ $[\,٥ \times (٥)^{س} - ١\,]\,[\,(٥)^{س} - ١\,] = ٠$

إما $٥ \times (٥)^{س} - ١ = ٠$ ⟸ $(٥)^{س} = \frac{١}{٥}$ ∴ س = -١

أ، $(٥)^{س} - ١ = ٠$ ⟸ $(٥)^{س} = ١$ ∴ س = ٠

مثـ١٠ـال إذا كانت $د_{١}(س) = (٣)^{س}$ ، $د_{٢}(س) = (٩)^{س}$ فأوجد قيمة س التى تحقق المعادلة $د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$

الحـــــــــــل

$(٣)^{٢س - ١} + (٩)^{س + ١} = ٧٥٦$

∴ $(٣)^{٢س - ١} + (٣)^{٢س + ٢} = ٧٥٦$ ∴ $(٣)^{٢س - ١}\,[\,١ + (٣)^{٣}\,] = ٧٥٦$

∴ $(٣)^{٢س - ١} \times [\,١ + ٢٧\,] = ٧٥٦$

∴ $(٣)^{٢س - ١} = ٧٥٦ \div ٢٨ = ٢٧ = (٣)^{٣}$

∴ ٢ س - ١ = ٣ ∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

تمـــــارين

١ ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أي منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة

(أ) د(س) = $٢^{س}$ (ب) د(س) = $٣^{س}$ (جـ) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

٢ أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يُعطى فائدة سنويةً مركبة قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات.

٣ أكمل ما يأتي:

(أ) إذا كان $٢^{|س|}$ = ٣٢ فإن س = ...

(ب) إذا قطع منحنى الدالة $د_١$ حيث $د_١$(س) = $٣^{س}$ منحنى الدالة $د_٢$ حيث $د_٢$(س) = ٤-س في نقطة (ك ، ٣) فإن مجموعة حل المعادلة $٣^{س}$ = ٤-س تساوي ....

٤ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

(أ) د(س) = ٨ (ب) د(س+١) = $\frac{١}{٣٢}$

٥ إذا كانت د(س) = $٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

(أ) د(س) = ٣٤٣ (ب) د(٢س) = $\frac{١}{٤٩}$

٦ إذا كانت د(س) = $٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

(أ) د(س) = ٢٧ (ب) د(س-١) = $\frac{١}{٩}$

٧ تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى ص = ٨١٩٢ $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ حيث ن عدد الاسابيع بدءًا من الآن. أوجد: (أ) عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن.

(ب) بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ٢٥٦.

٨ أكمل مايأتى:

(أ) الدالة د : د(س) = $٢^{س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

(ب) الدالة د : د(س)= $٢^{١-س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

(جـ) إذا مر منحنى الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ بالنقطة (١، ٣) فإن أ = ...

اللوغاريتمات

ص = لو$_{أ}$ س ⟺ س = أ^{ص} حيث أ ∈ ح$^{+}$ − {١} ، س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح

ملاحظة: لا معنى عن لوغاريتم عدد غير موجب ، بمعنى لو$_{٢}$ −٣ ، لو$_{٣}$ (٠) ليس لها معنى

الأساس أ يجب أن يكون موجب يختلف عن الواحد لو$_{−٢}$ ٨ ، لو$_{٠}$ ٥ ليس لها معنى

اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ وتكتب لو$_{١٠}$ ٨ = لو ٨

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن الدالة د: ح$^{+}$ ⟵ ح : د(س) = لو$_{أ}$ س

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية

هى د: ح$_{+}$ ⟵ ح ؛ د(س) = لو$_{أ}$ س : أ ∈ ح$_{+}$ − { ١ }

إذا كانت د(س) = لو$_{أ}$ س فإن الخط البيانى للدالة د(س)

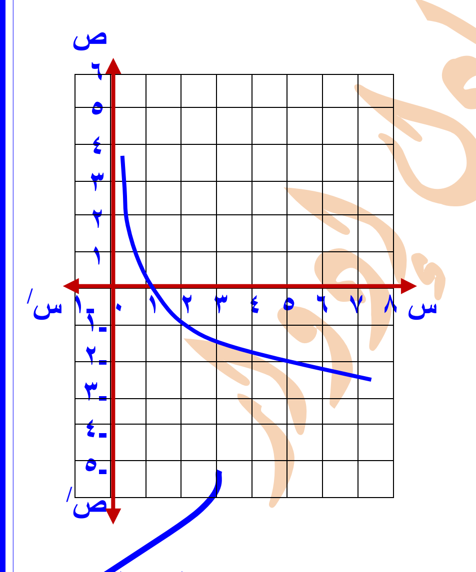
يمثل بالأزواج المرتبة (س ، لو$_{أ}$ س)

(١) إذا كانت : أ > ١

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

المجال = ح$_{+}$ أى] ٠ ، ∞ [

المدى = ح الدالة تزايدية على ح$_{+}$



(٢) إذا كانت ٠ < أ < ١

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

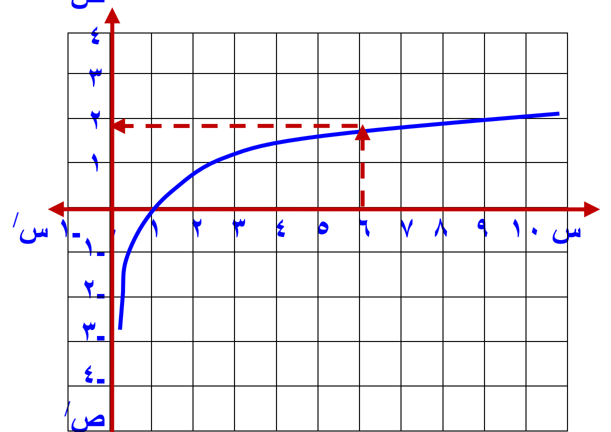
المجال = ح$_{+}$ أى] ٠ ، ∞ [

المدى = ح

الدالة تناقصية على ح$_{+}$

مثـــــ١ـــال : إرسم الشكل البيانى للدالة : د : د (س) = لـو$_{٣}$س متخذاً س ∈ [$\frac{١}{٩}$، ٩]
ومن الرسم أوجد : قيمة تقريبية للعدد لـو$_{٣}$ ٦، عددين صحيحين ينحصر بينهما لـو$_{٣}$ ٣,٥


الحــــــــــــــل



نكون الجدول :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	ــ ٢	ــ١	٠	١	٢

ومن الرسم :

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦ :

نرسم عند س = ٦ مستقيماً يوازى محور الصادات

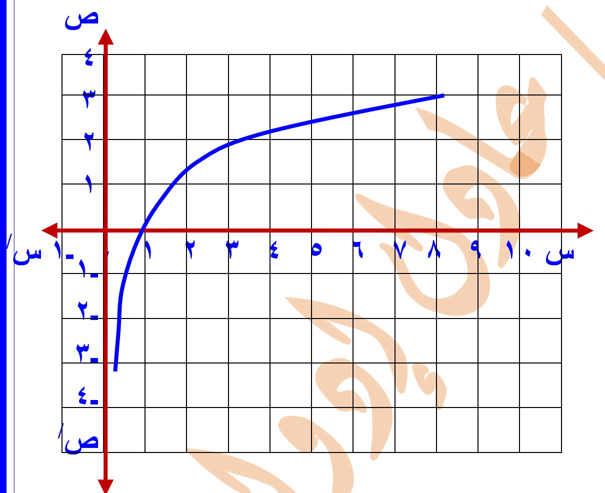
ليقابل المنحنى فى نقطة فتكون قيمة ص

المناظرة على محور الصادات = ١,٦ ∴ لـو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦

، بالمثل : نجد أن : لـو$_{٣}$ ٣,٥ ينحصر بين ١ ، ٢

مثـــــ٢ـــال: إذا كان منحنى الدالة د: د(س) = لـو$_{أ}$س يمر بالنقطة (٤، ٢) أوجد قيمة أ
ثم أرسم منحنى الدالة متخذ س ∈ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم أستنتج المدى والأطراد

الحــــــــــــــل



∵ د(س) = لـو$_{أ}$س يمر بالنقطة (٤، ٢)

∴ لـو$_{أ}$ ٤ = ٢ ⇐ (أ)^{٢} = ٤

∴ أ = ٢ والسالب مرفوض

∴ د(س) = لـو$_{٢}$س نكون الجدول :

س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
د (س)	ــ ٣	٢ـ	١ـ	٠	١	٢	٣

ومن الرسم : المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــــ٣ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $لو_{٢} س = ٢$ (ب) $لو_{٣} س = -٢$ (جـ) $لو_{٢} ٣٢ = س$

الحـــــــــل

(أ) $س = (٢)^{٢} = ٤$ ∴ $م.ح = \{ ٤ \}$

(ب) $س = (٣)^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ∴ $م.ح = \{ \frac{١}{٩} \}$

(جـ) $(٢)^{س} = ٣٢ = ٢^{٥}$ ∴ $س = ٥$ ∴ $م.ح = \{ ٥ \}$

مثـــــ٤ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $لو_{س} ١٢٥ = ٣$ (ب) $لو_{س} ٨س = ٤$ (جـ) $لو_{٢} \frac{١}{٨} = س$

الحـــــــــل

(أ) $١٢٥ = س^{٣}$ ⟸ $٥^{٣} = س^{٣}$ ⟸ $س = ٥$ ∴ $م.ح = \{ ٥ \}$

(ب) $٨ س = س^{٤}$ ⟸ $٨ = س^{٣}$

$٢^{٣} = س^{٣}$ ⟸ $س = ٢$ ∴ $م.ح = \{ ٢ \}$

(جـ) $(٢)^{س} = \frac{١}{٨}$ ⟸ $(٢)^{س} = (٢)^{-٣}$ ⟸ $س = -٣$ ∴ $م.ح = \{ -٣ \}$

مثـــــ٥ـــال : عين مجال الدزال المعرفة بالقواعد الآتية

(أ) $د_{١} = لو_{٣} (٢س + ١)$ (ب) $د_{٢} = لو_{س-٢} س$ (جـ) $د_{٣} = لو_{٢-س} س$

الحـــــــــل

(أ) الدالة معرفة عندما $٢س + ١ > ٠$ ⟸ $٢س > -\frac{١}{٢}$

∴ مجال $د_{١} =]-\frac{١}{٢} ، \infty[$

(ب) $س > ٠$ ، $س - ٢ > ٠$ ، $س - ٢ \neq ١$ ⟸ $س > ٠$ ، $س > ٢$ ، $س \neq ٣$

∴ مجال $د_{٢} =]٢ ، \infty[- \{٣\}$

(جـ) $س > ٠$ ، $٢ - س > ٠$ ، $٢ - س \neq ١$ ⟸ $س > ٠$ ، $س < ٢$ ، $س \neq ١$

∴ مجال $د_{٢} =]٠ ، ٢[- \{١\}$

مثـــــال ٦ : أوجد قيمة س إذا كان

(أ) $لو_{٢}$ (س^{٢} ــ ٢س) = ٣ (ب) $لو_{٢\sqrt{٣}}$ (س^{٢} ــ س) = ٢

الحـــــــل

(أ) س^{٢} ــ ٢ س = ٢^{٣} س^{٢} ــ ٢ س = ٨

س^{٢} ــ ٢ س ــ ٨ (س ــ ٤) (س + ٢) = ٠

س = ٤ أ، س = -٢ ∴ م.ح = { ٤ ، -٢ }

(ب) س^{٢} ــ س = ($٢\sqrt{٣}$)^{٢} س^{٢} ــ س = ١٢

س^{٢} ــ س ــ ١٢ (س ــ ٤) (س + ٣) = ٠

س = ٤ س = -٣ ∴ م.ح = { ٤ ، -٣ }

مثـــــال ٧ : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) (لو$_{٢}$س)^{٢} ــ ٥ لو$_{٢}$ س + ٦ = ٠ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} ــ ٥ لو$_{٢}$ س = ١٢

الحـــــــل

(أ) (لو$_{٢}$س - ٢)(لو$_{٢}$ س -٣) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$س = ٢ أ، لو$_{٢}$ س = ٣

س = (٢)^{٢} = ٤ أ، س = (٢)^{٣} = ٨ ∴ م.ح = { ٤ ، ٨ }

(ب) (لو$_{٢}$س - ٤)(لو$_{٢}$ س +٣) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$س = ٤ أ، لو$_{٢}$ س = -٣

س = (٢)^{٤} = ١٦ أ، س = (٢)$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ∴ م.ح = { ١٦ ، $\frac{١}{٨}$ }

مثـــــال ٨ : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) لو$_{٣}$ | س +٥ | = ٢ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} - لو$_{٢}$ س = ٠

الحـــــــل

(أ) | س + ٥ | = ٣^{٢} ⇐ س + ٥ = ٩ أ، س + ٥ = -٩

س = ٩ ــ ٥ أ، س = -٩ ــ ٥

س = ٤ أ، س = -١٤ ∴ م.ح = { ٤ ، -١٤ }

(ب) لو$_{٢}$ س (لو$_{٢}$ س -١) = ٠ ⇐ لو$_{٢}$ س = ٠ أ، لو$_{٢}$ س -١ = ٠

س = (١٠) ٠ = ١ أ، س = (١٠) ١ = ١٠ ∴ م.ح = { ١ ، ١٠ }

تمـــــارين

١) أكمل ما يأتى:

أ) الصورة الأسية المكافئة للصورة لو$_{٣}$ ٢٧ = ٣ هى ....

ب) الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣^{صفر} = ١ هى ....

جـ) لو ٠,٠٠١ = ... د) لو$_{٢}$ ١ = ...

هـ) إذا كان لو$_{س}$ ٤ = ٢ فإن س = ... و) إذا كان لو$_{٢}$ ١٢٨ = س + ١ فإن س = ...

ز) مجال الدالة د : د(س) = لو$_{٢}$ س هو .... ح) الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

ط) منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨، ....)

ى) إذا كان لو٣ = س ، لو ٥ = ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س،ص)

٢) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

أ) لو$_{٣}$ (س - ١) = ٢ ب) لو$_{٥}$ (س + ٢) = ٣ جـ) لو$_{س}$ ٩ = $\frac{٢}{٣}$

د) لو$_{س+١}$ ٨ = $\frac{٣}{٤}$ هـ) لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢ و) لو$_{س}$ ٩ = ٢

٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ) لو$_{٥}$ ١ ب) لو$_{٧}$ ٧ جـ) لو$_{٣}$ ٩ د) لو$_{٦}$ ٣ + لو$_{٦}$ ٢

٤) مثل بيانيًّا الدالة د فى كل مما يأتى الآتية ومن الرسم أوجد مداها وابحث اطرادها:

أ) د(س) = لو$_{٢}$ س ب) د(س) = لو$_{٣}$ س جـ) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س د) د(س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ (س + ١)

٥) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

أ) لو ١٥ ب) لو$_{٢}$ ٢٧ جـ) ٤لو ٧ - ٥لو١٣

٦) إذا كانت مصاريف الاشتراك السنوى بالجنيه لأسرة فى أحد النوادى الاجتماعية تتبع العلاقة د(س) = ٥٠٠ + ١٠٠لو (ن س) حيث ن عدد سنوات الاشتراك س عدد الأفراد. أوجد قيمة اشتراك أسرة مكونة من ٥ أفراد للسنة الرابعة فى هذا النادى.

قوانيين اللوغاريتمات

[١] لـو س ص = لـو س + لـو ص

فمثلا : لـو ٦ = لـو ٢ × ٣ = لـو ٢ + لـو ٣

والعكس : لـو ٣ + لـو ٤ = لـو ٣×٤ = لـو ١٢

لـو س + لـو (س+٢) = لـو س (س+٢)

[٢] لـو $\frac{س}{ص}$ = لـو س – لـو ص

فمثلا : لـو $\frac{٣}{٤}$ = لـو ٣ – لـو ٤

والعكس : لـو ٤ – لـو ٥ = لـو $\frac{٤}{٥}$

لـو س – لـو (س +١) = لـو $\frac{س}{س + ١}$

تذكر أن :

* لـو (س + ص) ≠ لـو س + لـو ص
* لـو (س ـ ص) ≠ لـو س ـ لـو ص
* لـو (س × ص) ≠ لـو س × لـو ص
* لـو (س ÷ ص) ≠ لـو س ÷ لـو ص

[٣] لـو $س^{ن}$ = ن لـو س

فمثلا : لـو $س^{٥}$ = ٥ لـو س

والعكس : ٣ لـو س = لـو $س^{٣}$

[٤] $لـو_{أ}$ أ = ١ فمثلاً : $لـو_{٥}$ ٥ = ١

[٥] $لـو_{أ}$ ١ = صفر

[٦] إذا: س ∋ $ح^{+}$ ، ص ، أ ∋ $ح^{+}$ – {١} فإن : $لـو_{ص}$ س = $\frac{لـو_{أ} س}{لـو_{أ} ص}$

فمثلاً: $لـو_{٣}$ ٨ = $\frac{لـو ٨}{لـو ٣}$ ، أ $لـو_{٦}$ ٧ = $\frac{لـو_{٥} ٧}{لـو_{٥} ٦}$

[٧] إذا: س ∋ $ح^{+}$ – {١} ، ص ∋ $ح^{+}$ – {١} فإن : $لـو_{ص}$ س = $\frac{١}{لـو_{س} ص}$

فمثلاً: $لـو_{٣}$ ٨ = $\frac{١}{لـو_{٨} ٣}$ ⇐ $لـو_{٨}$ ٧ × $لـو_{٧}$ ٨ =١

ملاحظة : إذا: س ∋ $ح^{+}$ ، م عدداً زوجياً لا يساوى الصفر ، أ ∋ $ح^{+}$ – {١}

فإن : $لـو_{أ}$ $(س)^{م}$ = م $لـو_{أ}$ |س| فمثلاً: $لـو_{٣}$ $(س)^{٤}$ = ٤ $لـو_{٣}$ |س|

مثـــال١ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

(أ) لو$_{٢}$ ١٥ + لو$_{٢}$ ١٤ − لو$_{٢}$ ١٠٥ (ب) لو ٤٨ + لو ١٢٥ − لو ٦

الحـــــل

(أ) لو$_{٢}$ $\frac{١٥ \times ١٤}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

(ب) لو $\frac{٤٨ \times ١٢٥}{٦}$ = لو ١٠٠٠ = لو $(١٠)^{٣}$ = ٣ لو ١٠ = ٣ × ١ = ٣

مثـــال٢ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

(أ) ٣لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{١٢٥}$ (ب) ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

الحـــــل

(أ) ٣لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٢٤٣ − لو$_{٣}$ ١٢٥ = لو$_{٣}$ $(٥)^{٣}$ + لو$_{٣}$ $(٣)^{٥}$ − لو$_{٣}$ $(٥)^{٣}$ = ٥لو$_{٣}$ ٣ = ٥

(ب) لو ١٠ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥ = لو $\frac{١٠ \times ٣}{٢ \times ١٥}$ = لو ١ = صفر

مثـــال٣ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

لو$_{٢}$ $\frac{٣}{٢٥}$ + لو$_{٢}$ ٥ − لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ + لو$_{٢}$ ٢٧ − لو$_{٢}$ ٢٤٣

الحـــــل

لـو$_{٢}$ $\frac{٣ \times (٥)^{٥} \times ١٢ \times ٢٧}{٢٥ \times ١٢٥ \times ٢٤٣}$ = لو$_{٢}$ ٤ = لو$_{٢}$ $(٢)^{٢}$ = ٢ لو$_{٢}$ ٢ = ٢

مثـــال٤ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

لو ٠,٠٠٩ − لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو ١٥ $\frac{٥}{٨}$ − لو $\frac{١}{١٢}$

الحـــــل

لـو $\frac{٩ \times ١٦ \times ١٢٥ \times ١٢}{١٠٠٠ \times ٢٧ \times ٨ \times ١}$ = لو ١ = صفر

مثـــ٥ــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو س + لو ٣ = لو ١٥ (ب) لو س ــ لو ٢ = لو ٣

الحـــــــل

(أ) لو س × ٣ = لو ١٥ ⟸ لو ٣ س = لو ١٥

٣س = ١٥ ⟸ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

(ب) لو $\frac{س}{٢}$ = لو ٣ ⟸ $\frac{س}{٢}$ = ٣

س = ٣ × ٢ = ٦ ∴ م.ح = { ٦ }

مثـــ٦ــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $لو_{٢}$ س + $لو_{٢}$ (س ــ ٢) = ٣ (ب) $لو_{٤}$ س + $لو_{٤}$ (س + ١٢) = ٣

الحـــــــل

(أ) $لو_{٢}$ س (س ــ ٢) = ٣ ⟸ $س^{٢}$ ــ ٢ س = $(٢)^{٣}$

$س^{٢}$ ــ ٢ س = ٨ ⟸ $س^{٢}$ ــ ٢ س ــ ٨ = (س ــ ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ س = ــ ٢ (مرفوض) ∴ م.ح = { ٤ }

(ب) $لو_{٤}$ س(س + ١٢) = ٣ ⟸ $لو_{٤}$ ($س^{٢}$ + ١٢س) = ٣

$س^{٢}$ + ١٢ س = $(٤)^{٣}$

$س^{٢}$ + ١٢ س ــ ٦٤ = (س ــ ٤)(س +١٦) = ٠

∴ س = ٤ س = ــ ١٦(مرفوض) ∴ م.ح = { ٤ }

مثـــ٧ــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

$لو_{٢}$ ٥ × $لو_{٥}$ ٧ × $لو_{٧}$ ٩ × $لو_{٣}$ ٢

الحـــــــل

المقدار = $\frac{لو ٥}{لو ٢}$ × $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ × $\frac{لو ٩}{لو ٧}$ × $\frac{لو ٢}{لو ٣}$ = $\frac{لو ٩}{لو ٣}$ = $\frac{٢لو ٣}{لو ٣}$ = ٢

مثـــ٨ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو س^٢ = لو ٤ + لو ٩ (ب) $\frac{\text{لو ٤٩ ـ (لو٧)}^٢}{\text{لو ٠,٠٧}}$ = لو س

الحـــــــل

(أ) لو س^٢ = لو ٤ + لو ٩ = لو ٤×٩ = لو ٣٦ = لو (٦)^٢ ⇐ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ |س| = ٦ ∴ س = ±٦ تحقق ∴ م.ح = { ٦ ، ـ ٦ }

(ب) لو س = $\frac{\text{لو (٧)}^٢ \text{ ـ (لو٧)}^٢}{\text{لو ٧ ـ لو ١٠٠}}$ = $\frac{\text{٢لو (٧) ـ (لو٧)}^٢}{\text{لو ٧ ـ لو (١٠)}^٢}$ = $\frac{\text{لو (٧)[٢ ـ لو٧]}}{\text{لو ٧ ـ ٢}}$

= ـ لو ٧ = لو (٧)^-١ = لو $\frac{١}{٧}$

مثـــ٩ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) (لو س)^٣ = لوس^٤ (ب) (٢)^(لو س)^٢ × ٦٤ = (٣٢)^(لو س)

الحـــــــل

(أ) (لو س)^٣ = ٤ لو س ⇐ (لو س)^٣ ـ ٤ لو س = ٠

لو س [(لو س)^٢ ـ ٤] = ٠ ⇐ لو س = ٠ أ، (لوس)٢ = ٤

∴ س = ١٠^صفر أ، لو س = |٢|

∴ س = ١ أ، لوس=٢ أ، لوس = ٢-

س = ١٠^٢ =١٠٠ س = ١٠^-٢ = ٠,٠١

∴ م.ح = { ١ ، ١٠٠ ، ٠,٠١ }

(ب) (٢)^(لو س)^٢ × (٢)^٦ = (٢^٥)^(لو س) ⇐(٢)^(لوس)^٢ + ٦ = (٢)^٥(لو س)

∴ (لو س)^٢ + ٦ = ٥ لو س ⇐ (لو س)^٢ ـ ٥ لو س + ٦ = ٠

نحلل: (لوس ـ ٢) (لو س ـ ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = ٣

∴ س = ١٠^٢ = ١٠٠ أ، س = ١٠^٣ س = ١٠٠٠

∴ م.ح = { ١٠٠ ، ١٠٠٠ }

مثـــــال١٠ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

(أ) $\frac{1}{\text{لـو}_{2}\ 12} + \frac{1}{\text{لـو}_{8}\ 12} + \frac{1}{\text{لـو}_{9}\ 12}$ (ب) $\text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{ح}$

الحـــــــــــل

(أ) $\frac{1}{\text{لـو}_{2}\ 12} + \frac{1}{\text{لـو}_{8}\ 12} + \frac{1}{\text{لـو}_{9}\ 12} = \text{لو}_{12}\ 2 + \text{لو}_{12}\ 8 + \text{لو}_{12}\ 9$

$= \text{لو}_{12}\ (2 \times 8 \times 9) = \text{لو}_{12}\ 144 = \text{لو}_{12}\ (12)^{2} = 2\ \text{لو}_{12}\ 12 = 2$

(ب) $\text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{ح} = \text{لو}_{\text{أ ب ح}}\ \text{أ ب ح} = 1$

استخدام الآلة الحاسبة :

اللوغاريتمات المعتادة

هى اللوغاريتمات التى أساسها (١٠) ولا يكتب أسفل رمز اللوغاريتم

كيفية أيجاد لوغاريتم عدد استخدام مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو [log]

(١) لإيجاد: لـو ٨,٤ نتبع الخطوات

[log] [8] [.] [5] [=] يظهر على الشاشة العدد 0,9242792861

فيكون : لـو ٨,٤ = ٠,٩٢٤٢

(٢) لإيجاد قيمة س إذا كان لـو س = ٠,٤٥٧٢ نتبع الخطوات

[shift] [log] [0] [.] [4] [5] [7] [2] [=] يظهر على الشاشة 2,86597276

فيكون : س $\simeq$ ٢,٨٦٥٥

اللوغاريتم لأى أساس

(١) لإيجاد: لـو_{3} ٢٤ نتبع الخطوات

[log□] [3] [2] [4] [=] يظهر على الشاشة العدد 2,892789261

فيكون : لـو_{3} ٢٤ $\simeq$ ٢,٨٩٢٨

مثـــ١ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) س = ٢ لـو ٧ ــ ٣ لـو٢   (ب) س = $\frac{\text{٣ لو ٥ ــ ٢ لو ٣}}{\text{٥ لو ٣ ــ لو ٧}}$

الحـــــــــــل

2 Log 7 – 3 Log 2 = 0.78

∴ س = ٠,٧٨

(3 Log 5 – 2 Log 3) ÷ (5 Log 3 – Log 7) = 0.74

∴ س = ٠,٧٤

مثـــ٢ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) لو س = ١,٥   (ب) س = $(٢,٣)^{١٠}$ (جـ) $(٤)^{س}$ = ٥٧

الحـــــــــــل

(أ) ∴ س = ٣١,٦   shift Log 1,5 = 31.6

(ب) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⇐ لـو س = لـو $(٢,٣)^{١٠}$ = ١٠ لـو ٢,٣

∴ س ≃ ٤,١٤   10 × log 2,3 = shift log = 4,142651121

(جـ) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⇐ س لـو ٤ = ٥٧   ∴ س = لـو ٥٧ ÷ لـو ٤

∴ س ≃ ٢,٩١٦   Log 57 ÷ log 4 = 2,916445007

مثـــ٣ـــال : إذا كان حجم الكرة ح يعطى من العلاقة ع = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} أوجد باستخدام الحاسبة(اولا) قيمة ع عندما نق = ١٠سم (ثانيا) قيمة نق عندما ع = ١٥٠

الحـــــــــــل

(أولا) عندما : نق = ١٠سم   ع = $\frac{٤}{٣}$ π$(١٠)^{٣}$ = ٤١٨٨,٧٩ بالالة

4 ÷3 × sh exp × 10 x^{y} 3 = 4188.79

(ثانيا) عندما: ع = ١٥٠   ١٥٠ = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

نق^{٣} = $\frac{\text{١٥٠ × ٣}}{\text{٤π}}$ = ٣٥,٨   بأخذ اللوغاريتم ٣ لـو نق = لـو ٣٥,٨

∴ نق ≃ ٣,٣ سم   Log 35,8 ÷ 3 = shift log = 3,2958

مثـــ٤ـــال : أوجد مساحة سطح مكعب حجمه ١٢٠٠ سم^{٣}

الحـــــــــــل

حجم المكعب = ١٢٠٠ ⇐ ل^{٣} = ١٢٠٠ بأخذ لوغاريتم الطرفين

٣ لو ل = لو ١٢٠٠ ⇐ ل = (لو ١٢٠٠) ÷ ٣

∴ ل ≃ ١٠,٦٢٧ سم Log 1200 ÷ 3 = shift log = 10,62658569

حل آخر حجم المكعب = ١٢٠٠ ⇐ ل^{٣} = ١٢٠٠

∴ ل = $\sqrt[٣]{١٢٠٠}$ = ١٠,٦٢٧

مساحة المكعب = ٦ ل^{٢} = ٦ (١٠,٦٢٧)^{٢} = ٦٧٧,٥٤ سم^{٢}

مثـــ٥ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

Ⓐ (٥)$^{س + ٢}$ = ١٢ Ⓑ (٥)$^{٢ س - ٣}$ = (٣)$^{س + ٤}$

الحـــــــــــل

Ⓐ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٥$^{س + ٢}$ = لو ١٢ ⇐ (س +٢) لو ٥ = لو ١٢

س لو ٥ + ٢ لو ٥ = لو ١٢ ⇐ س لو ٥ = لو ١٢ ـ ٢ لو ٥

س = $\dfrac{\text{لو ١٢ ـ ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥}}$ = ـ٠,٤٥

Ⓑ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (٥)$^{٢ س - ٣}$ = لو (٣)$^{س + ٤}$ ⇐ (٢ س ـ ٣) لو ٥ = (س + ٤) لو٣

٢س لو ٥ ـ ٣ لو ٥ = س لو ٣ + ٤ لو ٣ ⇐ ٢س لو٥ ـ س لو ٣ = ٤ لو ٣ +٣ لو ٥

∴ س (٢لو٥ ـ لو٣) = ٤ لو ٣ +٣ لو ٥ ∴ س = $\dfrac{\text{٤لو ٣ + ٣لو٥}}{\text{٢لو ٥ ـ لو٣}}$ = ٤,٣

مثـــ٦ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $(٥)^{٢س+١} = ٧ \times (٣)^{س+٢}$

الحـــــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ $لو ٥^{٢س+١} = لو(٧ \times ٣^{س+٢})$

$لو ٥^{٢س+١} = لو ٧ + لو ٣^{س+٢}$ ⇐ $(٢س+١) لو ٥ = لو ٧ + (س+٢) لو ٣$

٢س لو٥ + لو ٥ = لو ٧ + س لو ٣ + ٢لو٣

٢س لو ٥ ـ س لو٣ = لو ٧ + ٢لو٣ ـ لو ٥

س (٢لو٥ ـ لو ٣) = لو ٧ + ٢ لو ٣ ـ لو٥

$$∴ س = \frac{لو ٧ + ٢ لو ٣ ـ لو ٥}{٢لو ٥ ـ لو ٣} = ١,١٩$$

مثـــ٧ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $(٨)^{٢س+١} \times (٩)^{س+٢} = ٢٧$

الحـــــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ $لو(٨^{٢س+١} \times ٩^{س+٢}) = لو ٢٧$

$لو ٨^{٢س+١} + لو ٩^{س+٢} = لو ٢٧$

(٢س+١) لو ٨ + (س+٢) لو ٩ = لو ٢٧

٢س لو٨ + لو٨ + س لو ٩ + ٢لو ٩ = لو ٢٧

٢س لو ٨ + س لو ٩ = لو ٢٧ ـ ٢لو ٩ ـ لو ٨

س(٢لو ٨ + لو ٩)= لو ٢٧ ـ ٢ لو ٩ ـ لو ٨

$$∴ س = \frac{لو ٢٧ ـ ٢ لو ٩ ـ لو ٨}{٢ لو ٨ + لو ٩} = -٠,٥$$

مثـــ٨ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $٢^{٢س} ـ ٥ \times ٢^{س} + ٦ = ٠$

الحـــــــــــل

نحلل : $(٢^{س} ـ ٢)(٢^{س} ـ ٣) = ٠$

$٢^{س} = ٢$ ، أ $٢^{س} = ٣$ ⇐ س = ١ ، أ $لو ٢^{س} = لو ٣$

∴ س = ١ ، أ $س = \frac{لو٣}{لو ٢} = ١,٦$ ∴ س = { ١ ، ١,٦ }

مثـــ٩ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $٢^{٢س} - ٨ \times ٢^{س} + ١٥ = ٠$

الحـــــــــل

نحلل : $(٢^{س} - ٣)(٢^{س} - ٥) = ٠ \Leftarrow ٢^{س} = ٣$ أ، $٢^{س} = ٥$

لو $٢^{س}$ = لو٣ أ، لو $٢^{س}$ = لو٥ ∴ س لو ٢ = لو ٣ أ، س لو ٢ = لو٥

∴ س = $\frac{لو٣}{لو ٢}$ = ١,٦ أ، س = $\frac{لو٥}{لو ٢}$ = ٢,٣ ∴ س = { ٢,٣ ، ١,٦ }

مثـــ١٠ـــال: إذا كان س ص = $٤\sqrt{٢}$ أوجد قيمة: $٥ لو_{٢} س + ٤ لو_{٢} ص - لو_{٢} س^{٣} ص^{٢}$

الحـــــــــل

المقدار = $لو_{٢} \frac{س^{٥} \times ص^{٤}}{س^{٣} \times ص^{٢}} = لو_{٢} س^{٢} ص^{٢} = لو_{٢} (س ص)^{٢}$

$= لو_{٢} (٤\sqrt{٢})^{٢} = لو_{٢} ٣٢ = لو_{٢} ٢^{٥} = ٥ لو_{٢} ٢ = ٥ \times ١ = ٥$

مثـــ١١ـــال: إذا كان : ٧لوس + ٤ لوص − لو$س^{٥} ص^{٢}$ = ٢(لو ٢ + لو ٣)

إثبت أن س = $\frac{٦}{ص}$

الحـــــــــل

لو$س^{٧}$ + لو$ص^{٤}$ − لو$س^{٥}ص^{٢}$ = ٢ لو ٦

لو $\frac{س^{٧} \times ص^{٤}}{س^{٥} \times ص^{٢}}$ = لو $٦^{٢}$ ⇐ لو $س^{٢}ص^{٢}$ = لو ٣٦

$س^{٢}ص^{٢} = ٣٦$ ⇐ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{ص}$

مثـــ١٢ـــال : إذا كان : $\frac{لو س}{لو ٥} = \frac{لو ٩}{لو ٣} = \frac{لو ٤٩}{لو ص}$ أوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــــل

$\frac{لو س}{لو ٥} = \frac{لو (٣)^{٢}}{لو ٣} = \frac{لو (٧)^{٢}}{لو ص}$

$\frac{لو س}{لو ٥} = \frac{٢ لو ٣}{لو ٣} = \frac{٢ لو ٧}{لو ص} \Leftarrow \frac{لو س}{لو ٥} = ٢ = \frac{٢ لو ٧}{لو ص}$

لو س = ٢ لو ٥ = لو $(٥)^{٢}$ = لو ٢٥ ∴ س = ٢٥

، ٢ لو ص = ٢ لو ٧ ∴ ص = ٧

تمـــارين

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ٢ لو$_{٦}$ ٢ + ٢ لو$_{٦}$ ٣ =

(أ) ٦ (ب) ٣٦ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٢) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ =

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) صفر

(٣) لو$_{٥}$ ٢ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٢}$ ٣ =

(أ) ٣٠ (ب) ١ (جـ) صفر (د) لو ٣٠

(٤) عَبِّر عن كلٍّ ممايأتى بدلالة لو س، لو (س + ١)

(أ) لو س (س+١) (ب) لو $\frac{س}{س+١}$ (جـ) لو $\sqrt{س}$ (س+١)^{٢}

(٥) اختصْر لأبسطِ صورة:

(أ) لو$_{٦}$ ٥٤ - لو$_{٦}$ ٩ (ب) لو$_{٦}$ ٢ + لو$_{٦}$ ٣ (جـ) لو$_{٢}$ ١٢ + لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$

(د) لو ٤٨ + لو ١٢٥ - لو ٦ (هـ) $\frac{١ - لو ٢}{لو ١٢٥}$ (و) $\frac{لو ٤٩ + ٣ لو ٧}{لو ٧}$

(ز) لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ (ح) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ - لو$_{٣}$ $\sqrt{أب}$ - لو$_{٣}$ ٣جـ^{٢}

(٦) أوجد فى ح مجموعة حلَّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س+٢) = ٣ (ب) لو س + لو (س-٣) = ١ (جـ) لو$_{٥}$ س - لو$_{٥}$ ٢ = ٢

(د) لو (س+٣) - لو ٣ = لو س (هـ) $\frac{١}{لو_{٢} س}$ + $\frac{١}{لو_{٢} س}$ = ٢ (و) لو س - $\frac{٣}{لو س}$ = ٢

(٧) أثبت أنَّ لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{ء}$ جـ × لو$_{أ}$ ء = ١ ثم احسب قيمة لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ ١٦

(٨) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

(أ) ٣^{س} = ٧ (ب) ٥$^{س-١}$ = ٢ (جـ) ٤ × ٧$^{س-٢}$ = ١ (د) ٢$^{س-٣}$ = ٣$^{س+١}$

تمـــــــارين

*** أوجد قيمــة كل من : ـ**

١ ـ لو$_{٥}$ ٤٠ ـ لو$_{٥}$ ١٦ + لو$_{٥}$ ١٠

٢ ـ لو$_{٤}$ ٢ + لو$_{٤}$ ٥٦ ـ لو$_{٤}$ ٤٢ + لو$_{٤}$ ٢٤

٣ ـ لو ٣ ـ لو ٤ + لو ١٢ ـ ٢ لو ٠.٣

٤ ـ لو ٦٤ ـ لو ٦٠ ـ لو ٨ + لو ٣ ـ لو ٤

٥ ـ لو$_{٩}$ ٠,٤ ـ ٢ لو$_{٩}$ $\frac{٣}{٢}$ ٣ + لو$_{٩}$ $\frac{٥}{٨}$

٦ ـ ٣لو $\frac{٥}{٣}$ ـ ٢لو $\frac{٥}{٧}$ ـ ٤لو $\frac{١}{٣}$ ـ لو $\frac{١}{٢}$ ٧٣

٧ ـ لو $\frac{٦}{٥}$ + ٢ لو $\frac{١٥}{٢}$ ـ ٥ لو٣ + لو٥ ـ لو $\frac{٥}{٣٦}$

٨ ـ ٢ لو٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٥}$لو٢٤٣ + لو٠,٠١

*** إثبــت أن : ـ**

١ ـ لو $\frac{٩٨}{٢٧}$ + لو $\frac{٢٥}{٤٩}$ ـ لو $\frac{١}{٥٤}$ = لو$_{٥}$ ٢٥

٢ ـ لو$_{٢}$ $\frac{٤٠}{١٣}$ ـ لو$_{٢}$ $\frac{٧}{١٢}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٩١}{٦٠}$ = لو$_{٣}$ ٢٧

٣ ـ لو$_{٣}$ ٢٥ + لو$_{٣}$ ٧ ـ لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

٤ ـ لو ٠,٧٥ + لو١٢ ـ ٢ لو٠.٣ = لو$_{٦}$ ٣٦

٥ ـ لو$_{٦}$ (لو$_{٦}$ س^{٤٢}) ـ لو$_{٦}$ (لو$_{٦}$ س^{٧}) = ١

٦ ـ لو(٩^{٢} ـ ٣^{٢}) ـ لو(٩^{٢} ÷ ٣^{٢}) = لو٨

٧ ـ $\frac{\text{١ + لو ٢ ـ لو٤٥}}{\text{١ ـ لو ١٥}}$ = ٢

٨ ـ $\frac{\text{لو } \sqrt{١٢٥} \text{ + لو ٢٧ ـ لو} \sqrt{١٠٠٠}}{\text{لو٩ ـ لو ٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$

*** أوجد قيمــة س فيما يلى : ـ**

١ ـ لوس + لو٩ = ٤,٩ لو٣٥ ـ لو١٢٥ + لو١٧٥

٢ ـ لو س + لو٦٠ = لو٦٤ ـ لو٨ + لو ٣ ـ لو ٤

٣ ـ لو$_{٦}$ س = لو$_{٥}$ ١٠ ـ ٢ لو$_{٥}$ ٣ + لو$_{٥}$ ٠,٥ ـ ٨١ لو$_{٥}$ ٠,٤

٤ـ لو$_{٢}$ س = لو $\frac{٣}{٤}$ + لو ١٢ ـ ٢ لو ٠,٣

٥ـ لو(س ـ ١) + لو (س + ١) = لو ٨

٦ـ لو(س ـ ١)^{٣} ـ ٣ لو(س ـ ٣) = لو ٨

٧ـ لو(س + ٢) + لو (س ـ ٢) = ١ ـ لو ٢

٨ـ لو (س ـ ٣) + لو (س ـ ٢) = ١ ـ لو ٥

٩ـ لو (س^{٢} + ٩ س) = ١

١٠ـ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ٢) = ٣

١١ـ لو$_{٣}$(س^{٢} + ٤س + ٤) ـ لو$_{٣}$ (٢ س ـ ٥) = لو$_{٥}$ ٢٥

١٢ـ لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦س + ٩) ـ لو$_{٢}$ (س ـ ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥

* أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :ـ

١ـ (لو$_{٢}$ س)^{٢} + ٢ لو$_{٢}$ س = ٨

٢ـ (لو$_{٣}$ س)^{٢} ـ ٣ = ٢ لو$_{٣}$ س

٣ـ لو س + $\frac{٢}{\text{لوس}}$ = ٣

٤ـ لو$_{٢}$ س + $\frac{٣}{\text{لو}_{٢}\text{س}}$ = ٤

٥ـ لو | س | = ٢

٦ـ لو$_{٣}$ | س + ١| = ٢

٧ـ لو(٨ ـ س) + ٢ لو $\sqrt{\text{س ـ ٦}}$ = ٠

٨ـ لو(٣ـ س) + ٢ لو $\sqrt{\text{س ـ ٥}}$ = ٠

٩ـ لو ٤ لو ٢ لو ٣ (٢ س +١) = ٠

١٠ـ لو$_{\frac{١}{٣}}$ لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{\text{٢ س}}$ = ٠

١١ـ لو$_{٢}$ س = لو$_{٨}$ ٢٧

١٢ـ لو$_{٣}$ س = لو$_{٩}$ ٤

١٣ـ (لو س +١) لو($\frac{\text{س}}{١٠}$) = ٣

١٥ـ لو$_{٨}$ ٢٥ , ٠ = ٢٧ س^{٢} ـ ١٥ س

١٦ـ (٢)$^{(\text{لو س})^{٢}}$ = ٤ × (٢)$^{\text{لو س}^{٣}}$

١٧ـ | س +٣ | + (س + ٢)^{٢} = لو$_{٢}$ ٣٢ ، س ∋ ص

٢٠ـ لو$_{٣}$ (س^{٢} ـ ٩) ـ لو$_{٣}$ (س ـ ٣) = ٢

** أجب عما يلى :

١) إذا كان : س ص = $\sqrt[٣]{٩}$ فأثبت أن : ٤ لو$_{٣}$ س + ٥ لو$_{٣}$ ص ـ لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٣} = ٥

٢) إذا كان : ب^{س} ـ ٢ ب$^{-س}$ = ١ فإثبت أن : س لو ب = لو ٢ أ؛ س = لو$_{ب}$ ٢

٣) إذا كان: لو أ = جـ + لو ب فإثبت أن : أ = ب × ١٠^{جـ}

٤) إذا كان : ٣ لو أ ـ لو ا جـ^{٢} + ٤ لو جـ = ٢ (لو ٣ + لو ٤) فإثبت أن : أ جـ = ١٢

٥) إذا كان : لو$_{٢}$ د(س) = س فإثبت أن : د(١) × د(٢) × د(٣) = ٦٤

٦) إذا كان: $\sqrt[٥]{\text{س}}$ = $\sqrt[٧]{\text{ص}}$ = $\sqrt[٩]{\text{ع}}$ فإثبت أن : ص^{٢} = س ع

٧) إذا كان: لو٢ = ٠.٣٠١٠ ؛ لو٣ = ٠.٤٧٧١ فإوجد: لو٨ ؛ لو٦ ؛ لو٥

٨) إذا كان : لو$_{٢}$ ٥ = ٣ . ٢ ؛ لو$_{٢}$ ٧ = ٨ . ٢ فإوجد: لو$_{٢}$ ١٤ ؛ لو$_{٢}$ ٧٠

٩) إذا كان : لو$_{٣}$ ٦ = س فإثبت أن : لو$_{٩}$ ٨١ ـ لو$_{٣}$ ($\frac{٢}{٣}$) = ٤ ـ س

١٠) إذا كان: لوس ص= ٤ ـ لو٥ ؛ لوص^{٤} = ٨ ـ لو ١٦ فإوجد قيمة كلا من: س ؛ ص

١١) إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإثبت أن لو (س + س$^{-١}$) = ١

١٢) إذا كان : س = ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$ فإثبت أن لو$_{٤}$ (س + س$^{-١}$) = ٢

١٣) إذا كان: لو س + لو(س ـ ١٥) = لو٣٥ ـ لو٧ + لو ٢١ فإوجد قيمة : س

١٤) إذا كان : $\frac{\text{لوس}}{\text{لو٥}} = \frac{\text{لو٣٦}}{\text{لو٦}} = \frac{\text{لو٦٤}}{\text{لو ص}}$ فإوجد قيمة كلا من : س ؛ ص

١٥) إذا كان: ٣$^{س ـ ٢}$ = ٣لو$_{٢}$ ١٤ ـ ٤ لو$_{٢}$ ٥ + ٢ لو$_{٢}$ ($\frac{٢٥}{٧}$) ـ لو$_{٢}$ ٧ فإوجد قيمة: س

*بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س مقربا الناتج لرقمين عشريين : -

١) $٣^{س - ٢} = ٨.١$ ٢) $٨^{س + ١} = ٩^{س - ١}$

٣) $٢^{٢س + ١} = ١٥٠$ ٤) $٥^{س - ١} = (٦^{س} \div ٣٦)$

٥) $١٨^{٣س - ٥} = ٧.١٢$ ٦) $(٣٦ \div ٦^{٤س}) \times ٤^{س + ٥} = ٨$

* بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيم س مقربا الناتج لرقم عشرى :

١) $٢^{٢س} - ١٠ \times ٢^{س} + ٢٤ = ٠$

٢) $٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٣٥ = ٠$

٣) $٣ \times ٥^{٢س + ١} = ٢٥ \times ٩^{س + ١}$

٤) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ ؛ د(٢س + ١) + د(٢س − ١) =٣٥

٥) إذا كان د(س) = $٣^{س}$ ؛ د(س) + د(س − ٢) = ٢٠٠

٦) إذا كان $د_١(س) = ٨^{س}$ ؛ $د_٢(س) = ٤^{س}$ ؛ $د_١(٢س) + د_٢(٣س - ١) = ٨٢$

٧) $(١ + س)^{٣٠} = ١٠٠٠$

تمارين على تمثيل الدالة

١) مثل منحنى الدالة د(س) = $لو_٢$ س متخذا س ∈ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم

أوجد قيمة $لو_٢$ ٢,٥

٢) مثل منحنى الدالة د(س) = $لو_٣$ س متخذا س ∈ [$\frac{١}{٢٧}$ ، ٢٧] ومن الرسم

أوجد قيمة $لو_٣$ ٤,٥

٣) مثل منحنى الدالة د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س متخذا س ∈ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم

أوجد قيمة $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ؛ قيمة س عندما د(س) = ٢

٤) أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلة : $لو_٢$ س = ٣ − س

مذكرة التفاضل

النهايات والاتصال

الصف الثانى الثانوى

القسم الأدبى

الفصل الدراسى الأول

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ حاول وود

النهايـــات والأتصال

- مقدمة إيجاد النهاية عدديا وبيانيا
- نهاية دالة عند نقطة جبريا.
- نظرية (٤) القانون.
- •نهاية دالة عند اللانهاية.

النهايات

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] – ∞ ، ∞ [

$ح^+$ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

$ح^-$ = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] – ∞ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ – ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : $\frac{أ}{٠}$ ، أ ≠ ٠

---

(٢) الرمزان ∞ ، – ∞ :

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز – ∞ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : أ ∈ ح فإن : ∞ ± أ = ∞ ، – ∞ ± أ = – ∞

، ∞ × أ = { ∞ عندما أ > ٠ ، – ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

– ∞ × أ = { – ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

(٣) **الكمية الغير المعينة :** هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{صفر}{صفر}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{صفر}{صفر}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ − ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{أى عدد}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

العامل الصفرى :

إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت

د (م) = ٠ حيث م ∈ ح فإن المقدار (س − م) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س − م) بدون باق

أى أن : د (س) = (س − م) × كثيرة حدود أخرى

** **مفهوم الرمز " ← " فى النهايات :**

س م س
٢

إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد

فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمي

أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار

وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ← ٢

مفهوم نهاية دالة عند نقطة

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^٢ - ١}{١ - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸						س تقترب جداً من (١) من اليسار ⟹			
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸					⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار					

وهذه الطريقة تسمى $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

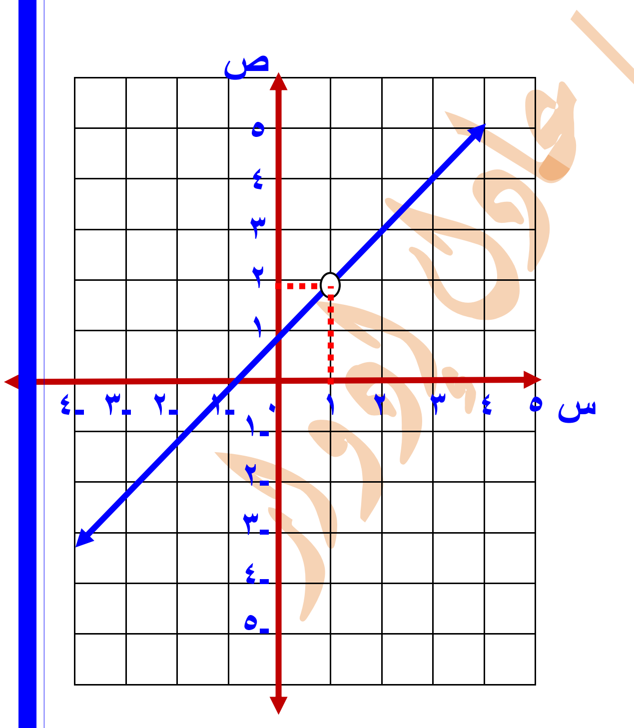
إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من م من جهتى اليمين واليسار فإن نهابة د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\lim_{س \to م}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

د(س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١ + ١ = ٢

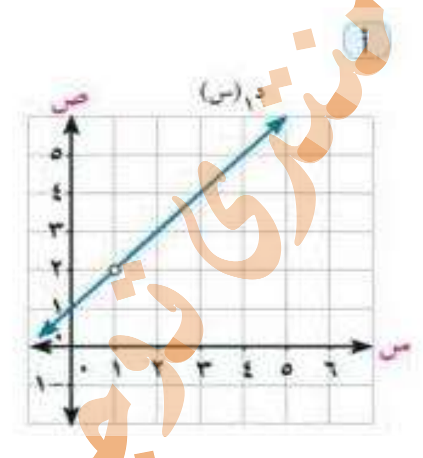
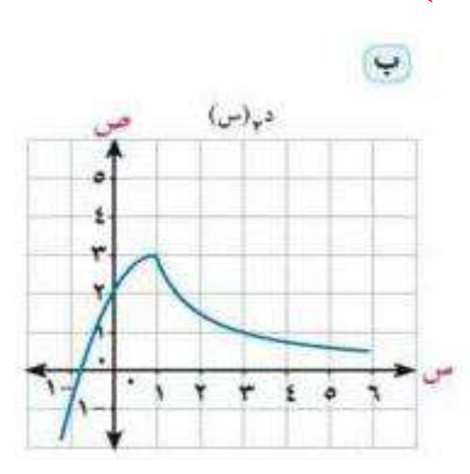
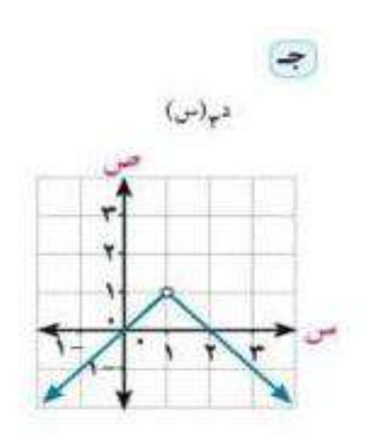


عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

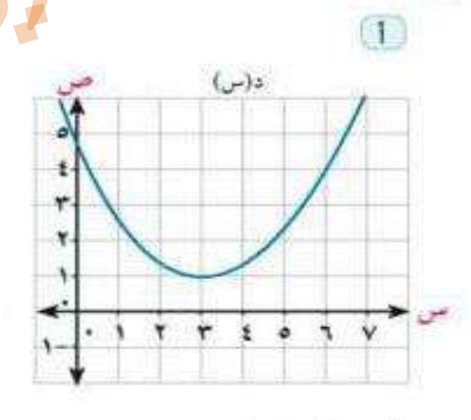
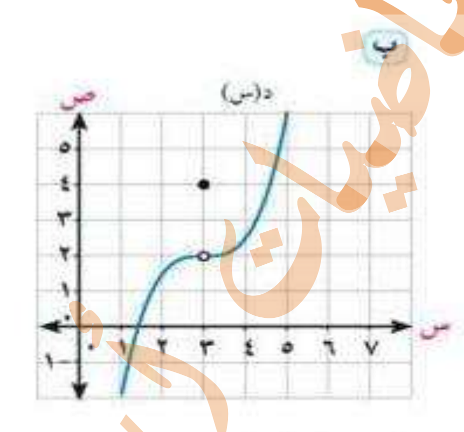
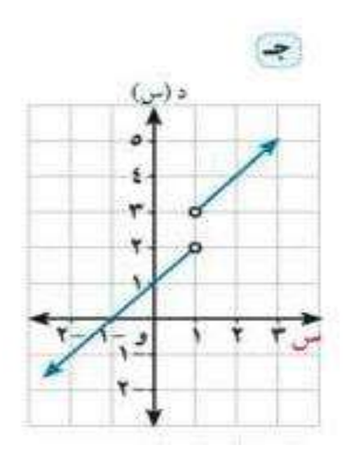
فيكون : $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢

مثــ١ـال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ⟵ ١

أ) نهــــا د(س) = ٢ (س ⟵ ١)   ب) نهــــا د(س) = ٣ (س ⟵ ١)   جـ) نهــــا د(س) = ١ (س ⟵ ١)

مثــ٢ـال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

أ) نهــــا د(س) = ١ (س ⟵ ٣)   ب) نهــــا د(س) = ٢ (س ⟵ ٣)   جـ) نهــــا د(س) = (س ⟵ ١)

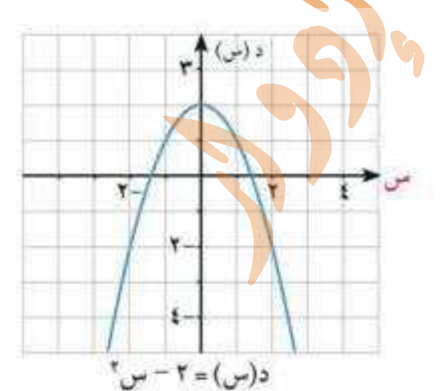
ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية

غير موجودة

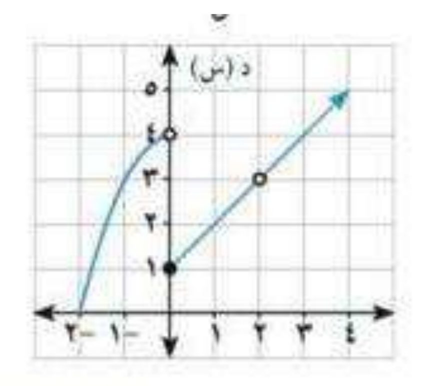
مثــ٣ـال : من الشكل البيانى المقابل

أ) نهــــا (٢ ـ س^{٢}) = ٢ (س ⟵ ٠)

ب) د(صفر) = ٢



مثـــ٤ـــال : من الشكل البيانى المقابل



أ) د(٠) = ١ ب) د(٢) غير معرفة

جـ) نهـــــــا (س ← ٠) د (س) = غير موجودة

د) نهـــــــا (س ← ٢) د (س) = ٣

مثـــ٥ـــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج نهـــــــا (س ← ٢) $\frac{(س^{٢} - ٤)}{(س - ٢)}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

د(س) = $\frac{(س^{٢} - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ← ١

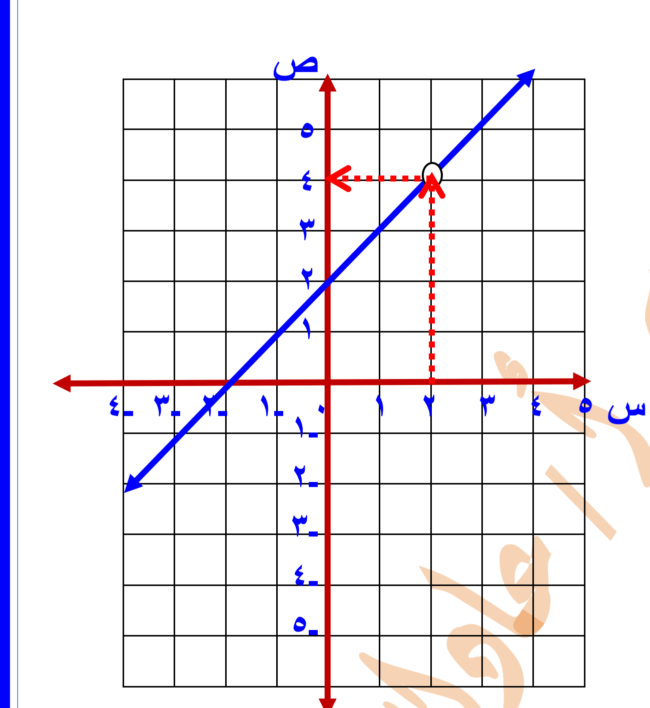
د(س) = $\frac{(س - ٢)\ (س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢ = ٤

عندما : س ← ٢ من اليمين واليسار

فإن د(س) ← ٤ من فوق وتحت

فيكون : نهــــــا (س ← ٢) د(س) = ٤

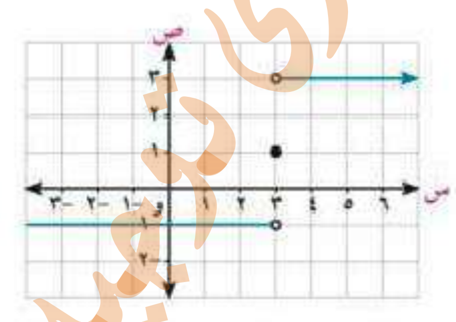


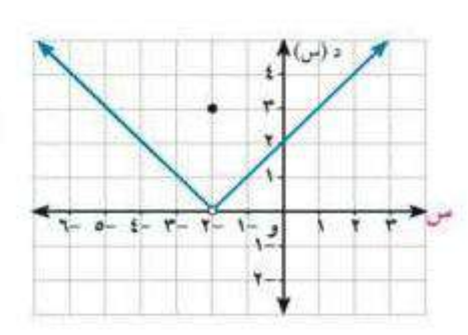
تمـــارين

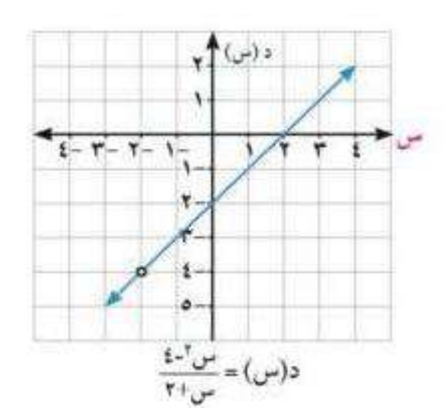
(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة



أ) $\lim_{س \to ٣}$ د(س) ب) $\lim_{س \to -٢}$ د(س) جـ) $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

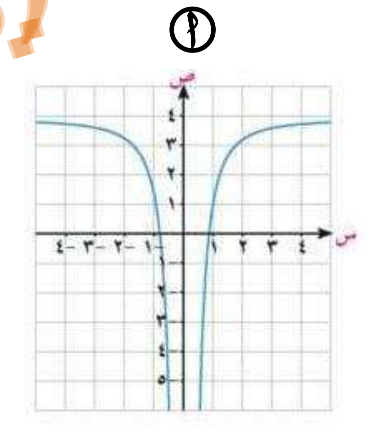




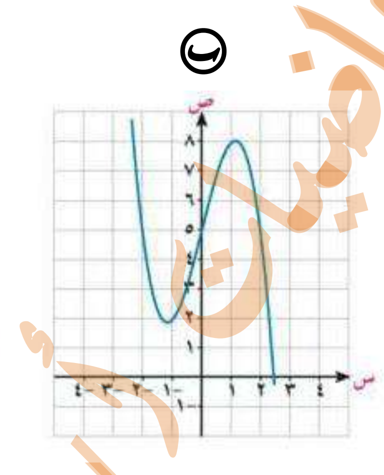


(٢) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ⟵ صفر

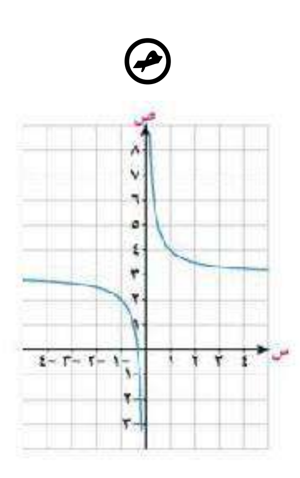
أ)



ب)



جـ)



(٣) أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \to -١} \frac{(س^٢ - ١)}{(س - ١)}$

س	-١,١	-١,٠١	-١,٠٠١	-١	-٠,٩٩٩	-٠,٩٩	-٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٤) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

أ) $\lim_{س \to ٢} (٣س - ١)$ ب) $\lim_{س \to ١} (س^٢ + ٢)$

جـ) $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)}{(س^٣ - ١)}$ ء) $\lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٤س + ٣)}{(س - ٣)}$

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : نهـــــا (٣ س + ٤) = ٧ (س ← ١)

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـــــا د (س) = د (م) (س ← م)

فمثلا : نهـــــا (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣ (س ← ٣)

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ك حيث ك ثابت

فإن : نهـــــا د (س) = ك (س ← م)

فمثلا : د (س) = ٤ ، نهـــــا د(س) = ٤ (س ← ٢)

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : د (س) = ل ، ر (س) = م فإن :

(١) نهـــــا [د (س) ± ر (س)] = نهـــــا د (س) ± نهـــــا ر (س) (س ← م)

= ل ± م

أى أن :

نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما (للنهايات)

(٢) نهــــا [د (س) × م (س)] = نهــــا د (س) × نهــــا م (س)
س ← أ   س ← أ   س ← أ
= ل × م

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) نهــــا ك × د (س) = ك نهــــا د (س) = ك × ل   حيث ك ثابت
س ← أ   س ← أ

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) نهــــا $\frac{\text{د (س)}}{\text{م (س)}}$ = $\frac{\text{نهـــا د (س)}}{\text{نهـــا م (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ حيث : م $\neq$ صفر
س ← أ

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه $\neq$ صفر

لإيجاد: نهــــا د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :
س ← أ

١ ـ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = أ هى هذا العدد الحقيقى

٢ ـ $\frac{\text{عدداً حقيقياً} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند أ

٣ ـ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ـ $\frac{\text{أ}}{\pm\infty}$ = صفر

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = أ

وكانت : نهــــا ق (س) لها وجود
س ← أ

فإن : نهــــا ق (س) = نهــــا د (س)
س ← أ   س ← أ

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى

(س ـ أ) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : س^{٢} – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)

الفرق بين مكعبين : س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} – ٢ س + ٤)

مجموع مكعبين : س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣) (س^{٢} + ٣ س – ٩)

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل س^{٢} = ١

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} – ٥ س + ٦ = (س – ٣)(س – ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٥ س – ٦ = (س – ٦)(س + ١)

س^{٢} – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)

إذا كان معامل س^{٢} ≠ ١

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٣ س^{٢} – ١٩ س + ٦ = (٣ س – ١)(س – ٦)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـــال ١ : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ٥}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ٥} = \dfrac{٣ \times ١ + ٤}{١ + ٥} = \dfrac{٧}{٦}$

مثـــال ٢ : $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن :

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} = \dfrac{٣ \times (-١) + ٤}{-١ + ١} = \dfrac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـــال ٣ : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

الحـــل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\dfrac{(٣)^{٢} - ٩}{٣ - ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)}$

$= (\text{س} + ٣) = ٦$

مثـــال ٤ : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

الحـــل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\dfrac{(٢)^{٢} - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)}$

$= (\text{س} - ٣) = -١$

مثــ٥ــال : $\lim_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ـ ٣ نجد أن : د (ـ ٣) = $\frac{٩ - ٣ \times ٣}{٩ - ٣ - ٦} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦} = \lim_{س \leftarrow -٣} \frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

$= \lim_{س \leftarrow -٣} \frac{س}{(س - ٢)} = \frac{-٣}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثــ٦ــال : $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

∵ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦$ ÷ (س - ٣)

$س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦$	س - ٣
$\mp س^٣ \pm ٣ س^٢$	$س^٢ - س - ٢$
$- س^٢ + س + ٦$	
$\mp س^٢ \pm ٣ س$	
$- ٢ س + ٦$	
$\mp ٢ س \pm ٦$	
....	

∴ $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٢$

مثــ٧ــال : $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + ٣س - ٤}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، ـ١ ، ـ١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو س^2 ـ س ـ ١

١	ـ ٢	٠	+١	١
	١	□	□	
١	ـ ١			

١	+ـ٢	٠	+١
	١	ـ ١	ـ ١
١	ـ ١	ـ ١	٠

خارج القسمة

س^2 ـ س ـ ١

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^2 - س - ١)}{(س - ١)(س + ٤)} = \frac{١ - ١ - ١}{١ + ٤} = \frac{١}{٥}$$

مثـال٨ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^3 - ٧ س + ٦}{٣س^2 - ٨ س + ٤}$

الحــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{١^3 + ١ - ٢}{١^2 + ٣ \times ١ - ٤}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+٠	ـ ٧	ـ ٦	٢
	٢	□	□	
١	+٢	ـ ٧	ـ٦	

١	+٢	٤	ـ ٦
١	+٢	ـ ٣	٠

خارج القسمة

س^2 + ٢ س ـ٣

$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^2 + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^2 + ٢س - ٣)}{(٣س - ٢)}$$

$$= \frac{(٤ + ٤ - ٣)}{(٦ - ٢)} = \frac{٥}{٤}$$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)

نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثـــال ٩ : $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{س^٢ + ٢ س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

الحــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠)^٢ + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ٩} + ٣$ نجد أن :

$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{س (س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$

$= (٠ + ٢) (\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$

مثـــال ١٠ : $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

الحــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣ + ١} - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ١} + ٢$ نجد أن :

$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{(س + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$

مثـــال ١١ : $\lim_{س \leftarrow ٢} (\frac{س^٢ - س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢})$

الحــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$ = ٢ + ١ = ٣

تمـــــــــــــارين

أكمــــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س - ١) =...... (٢) $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ =........

(٣) $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ =...........

(٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢س - جا س) = ...

(٥) إذا كان : $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{م}{س + ١}$ = ٤ فإن : م = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \to ٤}$ (٣س - $\sqrt{س}$) (أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) -٣ (ج) ١٢ (د) -١٢

(٣) $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (ج) -١ (د) -٥

(٤) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{جا س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + س + ٦}{س + ٣}$	٢	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٩}{س + ٣}$
٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + س - ٦}{س - ٢}$	٤	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$
٥	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س + ٣}$	٦	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$
٧	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$	٨	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٩}$
٩	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ١}{٢س - ٢}$	١٠	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - ١٢}{س^٣ - ٨}$
١١	$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٥س}$	١٢	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س^٢ - س}$
١٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ + ٢س - ٨}$	١٤	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ + ٩س + ١٨}$
١٥	$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٥س - ٦}{س^٢ - ١}$	١٦	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٤}$
١٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢س^٢ - ٧س + ٣}{س - ٣}$	١٨	$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - س - ٤}{س^٢ + ٣س + ٢}$

رقم	المسألة	رقم	المسألة
١٩	$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ١٤}{٣س^٢ - ٤س - ٤}$	٢٠	$\lim_{س \to -١} \frac{٢س^٢ + ٧س + ٥}{٣س^٢ + ٤س + ١}$
٢١	$\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س^٢ - ٧س + ١٢}$	٢٢	$\lim_{س \to ٣} \frac{٢س^٢ - ٥س - ٣}{س - ٣}$
٢٣	$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ - ٩}\right)^٢$	٢٤	$\lim_{س \to \frac{٢}{}} \left(\frac{٩س^٢ - ٤}{٣س - ٢}\right)^٢$
٢٥	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س - ٦}{س^٢ - ٤}$	٢٦	$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$
٢٧	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٣س + ٢}$	٢٨	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٤س - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

رقم	المسألة	رقم	المسألة
٢٩	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + س - ١٠}{س^٢ - ٤س + ٤}$	٣٠	$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٤س^٢ - س - ٤}{س^٤ - ١}$
٣١	$\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{س - ٤} - ١}$	٣٢	$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س + ١٧} - ٤}{س + ١}$
٣٣	$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٢٥} - ٥}$	٣٤	$\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$
٣٥	$\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^٢ - س + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{س^٣ + ١}}$	٣٦	$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٢}$

نظرية ٤ : نهاية دالة (بالقانون)

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ} = م \times أ^{م-١}$$ لكل: $م \in ح - \{٠\}$

نتيجة:

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \frac{س^{م} - أ^{م}}{س^{ن} - أ^{ن}} = \frac{م}{ن} \times أ^{م-ن}$$ لكل: $م ، ن \in ح - \{٠\}$

مثـــال١ : $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢} = \frac{٣٢ + ٣٢}{٢ + ٢} = ١٦$ " معرفة "

مثـــال٢ : $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٤} + ٨١}{س - ٣} = \frac{٨١ + ٨١}{٣ - ٣} = \frac{١٦٢}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة

مثـــال٣ : $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س - ٢}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $د(٢) = \frac{١٢٨ - ١٢٨}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ المقدار $= \text{نهـا} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س - ٢} = ٧ \times ٢^{٧-١} = ٥ \times ٢^{٦} = ٣٢٠$

مثـــال٤ : $\text{نهـا}_{س \leftarrow -٤} \frac{س^{٣} + ٦٤}{س + ٤}$ (س ← ٢)

الحـــل

بالتعويض نجد أن : $د(-٤) = \frac{-٦٤ + ٦٤}{-٤ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ المقدار $= \text{نهـا}_{س \leftarrow -٤} \frac{س^{٣} - (-٤)^{٣}}{س - (-٤)}$

$= ٣ \times (-٤)^{٣-١} = ٣ \times (-٤)^{٢} = ٤٨$

مثـــال ٥ : $\lim_{س \to \sqrt{5}} \frac{س^{7} - 125\sqrt{5}}{س - \sqrt{5}}$

الحــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(\sqrt{5}) = \frac{(\sqrt{5})^{7} - 125\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore$ المقدار $= \lim_{س \to \sqrt{5}} \frac{س^{7} - (\sqrt{5})^{7}}{س - (\sqrt{5})} = 7 \times (\sqrt{5})^{6} = 7 \times 5^{3} = 875$

مثـــال ٦ : $\lim_{س \to -\frac{3}{2}} \frac{32 س^{5} + 243}{4 س - 9}$

الحــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(-\frac{3}{2}) = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

عندما : س $\to -\frac{3}{2}$ فإن : ٢ س $\to -3$

$\therefore$ المقدار $= \lim_{2س \to -3} \frac{(2 س)^{5} - (-3)^{5}}{(2 س)^{2} - (-3)^{2}} = \frac{5}{2} \times (-3)^{3} = \frac{-135}{2}$

مثـــال ٧ : $\lim_{س \to 0} \frac{(س + 5)^{4} - 625}{س}$

الحــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(0) = \frac{(0 + 5)^{4} - 625}{0} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بإضافة : $(+5 ، -5)$ للمقام

، وعندما : س $\to 0$ فإن : $(س + 5) \to 5$

$\therefore$ المقدار $= \lim_{س \to 0} \frac{(س + 5)^{4} - (5)^{4}}{(س + 5) - 5}$

$= \lim_{س+5 \to 5} \frac{(س + 5)^{4} - (5)^{4}}{(س + 5) - 5} = 4 \times 5^{3} = 500$

مثـ٨ـال : $\underset{س \leftarrow ٦}{نهـــا} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

الحـــــــل

بالتعويض نجد أن : د (٦) = $\frac{(٦ - ٥)^{٧} - ١}{٦ - ٦}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بوضع: (– ٦) = (– ٥ – ١) بالمقام ، وعندما : س ← ٦ فإن : (س – ٥) ← ١

∴ المقدار = $\underset{س \leftarrow ٦}{نهـــا} \frac{(س - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(س - ٥) - ١}$

= $\underset{س - ٥ \leftarrow ١}{نهـــا} \frac{(س - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(س - ٥) - ١}$ = ٧ × ١ ^{٦} = ٧

مثـ٩ـال : $\underset{و \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(س + ٥ و)^{٩} - س^{٩}}{٣ و}$

الحـــــــل

بالتعويض نجد أن : د (٠) = $\frac{(س + ٥ \times ٠)^{٩} - س^{٩}}{٣ \times ٠}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{٥}{٣}$ ، إضافة (+ س ، – س) بالمقام

، وعندما : و ← ٠ ⟸ ٥ و ← ٠ ∴ (س + ٥ و) ← س

∴ المقدار = $\underset{و \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{\frac{٥}{٣} (س + ٥ و)^{٩} - (س)^{٩}}{\frac{٥}{٣} (٣ و) + س - س}$

= $\frac{٥}{٣}$ $\underset{س + ٥ و \leftarrow س}{نهـــا} \frac{(س + ٥ و)^{٩} - (س)^{٩}}{(س + ٥ و) - س}$ = $\frac{٥}{٣}$ × ٩ × س ^{٨} = ١٥ س ^{٨}

تمـــــــــارين

أكمــــــل ما يأتى

(١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٩} - ١}{س^{٥} - ١} =$ ......

(٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(٣) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٣} + ٨} =$ ....

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٩} - ١}{س} =$ ....

(٥) إذا كان : $\underset{س \to ك}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س - ك} = ٨٠$ فإن : ك = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ (أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (ج) ٦٤ (د) ٣٢

(٣) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ١}{س + ١}$ (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) -٥ (د) -٤

(٤) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ (أ) $س^{٧}$ (ب) $٧س^{٦}$ (ج) صفر (د) ١

(٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٣} - ١}{س^{١٩} - ١}$ (أ) $\frac{١٣}{١٩}$ (ب) $\frac{١٩}{١٣}$ (ج) -٦ (د) $١ - \frac{١٣}{١٩}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$	٢	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢}$
٣	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$	٤	$\underset{س \to -\sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ٢٧\sqrt{٣}}{س + \sqrt{٣}}$

٥) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{٢\text{س} - ٤}$

٦) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س}^{٦} - ٣}{\text{س} - ١}$

٧) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٨١\,\text{س}}{\text{س} - ٣}$

٨) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}$

٩) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٧} + ١٢٨}{\text{س}^{٣} + ٨}$

١٠) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٣} + ٢٧}$

١١) $\underset{\text{س} \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢}$

١٢) $\underset{\text{س} \to -\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^{٢} - ٥}$

١٣) $\underset{\text{س} \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣٢\,\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{٨\,\text{س}^{٣} - ٢٧}$

١٤) $\underset{\text{س} \to -\frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦\,\text{س}^{٤} - ٦٢٥}{٨\text{س}^{٣} + ١٢٥}$

١٥) $\underset{٢\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦\,\text{س}^{٤} - ١}{١٢٨\,\text{س}^{٧} + ١}$

١٦) $\underset{٢\text{س} \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٨\,\text{س}^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢\,\text{س} - \sqrt{٣}}$

١٧) $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ١٢٨\,\text{س}^{١٢}}{\text{س}^{٢} - ١٦\,\text{س}^{٦}}$

١٨) $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦\,\text{س}^{٤} - ١}{٢\text{س} - ١}$

١٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٤} - ١٦}{\text{س}}$

٢٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}}$

٢١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ١)^{٥} + ١}{\text{س}}$

٢٢) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٥} + ١}{\text{س} + ٣}$

٢٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ١)^{٥} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

٢٤) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)^{٦} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}$

٢٥	$\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٤}$	٢٦	$\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$
٢٧	$\lim_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^{٦} - ١}{(س + ٢)^{٣} - ١}$	٢٨	$\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + ٣س)^{٧} - ١}{٤س}$
٢٩	$\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س + ١)^{٥} - ١}{٥س}$	٣٠	$\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + ٥هـ)^{٩} - س^{٩}}{٦هـ}$
٣١	$\lim_{و \to ٠} \frac{(س + ٤و)^{٦} - س^{٦}}{و}$	٣٢	$\lim_{و \to ٠} \frac{(س + ٣و)^{٨} - س^{٨}}{٤و}$
٣٣	$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$	٣٤	$\lim_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} - ٣)^{[illegible]} - ١}{س - ٢}$
٣٥	$\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ١)^{٣} + ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$	٣٦	$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} + س^{٥} - ١٦٠}{س - ٢}$
٣٧	$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٢)^{٥} + س - ٤}{٣س - ٩}$	٣٨	$\lim_{س \to ٢} \frac{١٦س^{-٤} - ١}{س - ٢}$
٣٩	$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{\sqrt[٤]{س} - ١}$	٤٠	$\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣}\sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$
٤١	$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢}{س - ٢}$	٤٢	$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٦} - ٣}{س - ١}$
٤٣	$\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$	٤٤	$\lim_{س \to ٩} \frac{س - \sqrt{٣}}{س - ٩}$

٤٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \left(\dfrac{\text{س} - ١}{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢} \times \dfrac{\text{س}^{٦} - ١}{\text{س}^{٣} - ١} \right)$

٤٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \left(\dfrac{\text{س} + ١}{\sqrt{٣ - \text{س}} - ٢} - \dfrac{\text{س}^{١٠} - \text{س}}{\text{س}^{١٣} - \text{س}} \right)$

٤٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{١}{\text{س}^{٤} - ١٦} \times \dfrac{(\text{س}^{٥} - ٣٢)^{٣}}{(\text{س} - ٢)^{٢}} \right)$

٤٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س} - ٣} - ٤}{\text{س} - ٤}$

٤٩) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{٢} + (\text{أ} - ١)\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - ١} = ٤$ أوجد قيمة : أ

نهاية الدالة عند اللانهاية

إذا كانت د (س) تقترب من قيمة حقيقية معينة (ل مثلاً) عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نقول أن الدالة لها نهاية

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة $\lim\limits_{س \to \infty}$ د (س) = ل

نظرية (١) : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س} =$ صفر

نتيجة (١) : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ}{س} =$ صفر حيث : أ ∈ ح − { ٠ }

نتيجة (٢) : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} =$ صفر حيث : أ ∈ ح − { ٠ } ، ن ∈ $ح^{+}$

تستخدم النظرية ونتائجها فى إيجاد $\lim\limits_{س \to \infty}$ د (س) حينما

(١) تكون الدالة د على شكل كسر جبرى

(٢) كان التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ أ، $\infty - \infty$

وذلك بأن نقسم كلاً من البسط والمقام على (س) مرفوعاً لأعلى قوة ^{أس} فى مقام الكسر

، أما إذا أعطى ($\infty - \infty$) فنضرب فى المرافق أولاً

ثم نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير (س) مرفوعاً لأعلى قوة (أس) فى المقام

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثــال١ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^٢ - ٣ س}{س^٢ - ٢}$

الحـــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س}}{١ - \frac{٢}{س^٢}} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٠} = ٥$

مثــال٢ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^٣ - ٣ س + ٦}{٣ س - ٧ س^٣}$

الحـــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س^٢} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٣}{س^٢} - ٧} = \frac{٥ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = -\frac{٥}{٧}$

مثــال٣ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س^٢ + ٦}{٢ س - ٧ س^٣}$

الحـــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = $\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٢}{س^٢} - ٧} = \frac{٠ + ٠}{٠ - ٧} =$ صفر

مثـال٤ : نهـــا $\frac{٩ س^٣ - ٢ س + ٥}{٢ س - س^٢}$ (س ← ∞)

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

∴ المقدار = نهـــا (س ← ∞) $\frac{٩ س - \frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{\frac{٢}{س} - ١} = \frac{٩ \times ∞ - ٠ + ٠}{٠ - ١} = \frac{∞}{١}$

∴ ليس للدالة نهاية (اكبر أس فى المقام)

مثـال٥ : نهـــا $\frac{(س - ٢) (٣س^٢ + ١)}{(٤س + ٣) (٥ س^٢ - ١)}$ (س ← ∞)

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$ = س × $س^٢$ = $س^٢$ × س

∴ المقدار = نهـــا (س ← ∞) $\frac{(١ - \frac{٢}{س})(٣ + \frac{١}{س^٢})}{(٤ + \frac{٣}{س})(٥ - \frac{١}{س^٢})} = \frac{(١ - ٠)(٣ + ٠)}{(٤ + ٠)(٥ - ٠)} = \frac{٣}{٢٠}$

مثـال٦ : نهـــا $\frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ + ١}}{\sqrt{٩س^٢ - ٥}}$ (س ← ∞)

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$ = $\sqrt[٣]{س^٣}$

∴ المقدار = نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt[٣]{٨ + س^{-٣}}}{\sqrt{٩ - ٥س^{-٢}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨ + ٠}}{\sqrt{٩ - ٠}} = \frac{٢}{٣}$

مثـال٧ : $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^٢ + س} - \sqrt{س^٢ - ١} \right)$

الحـــــــل

∴ د (∞) = ∞ ــ ∞ = كمية غير معنة

بالضرب بسطاً ومقاماً × المرافق نجد :

$$\because د(س) = \left(\sqrt{س^٢ + س} - \sqrt{س^٢ - ١} \right) \times \frac{\left(\sqrt{س^٢ + س} + \sqrt{س^٢ - ١} \right)}{\left(\sqrt{س^٢ + س} + \sqrt{س^٢ - ١} \right)}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + س - (س^٢ + ١)}{\left(\sqrt{س^٢ + س} + \sqrt{س^٢ - ١} \right)}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س - ١)}{\left(\sqrt{س^٢ + س} + \sqrt{س^٢ - ١} \right)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س $= \sqrt{س^٢}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{١ - س^{-١}}{\sqrt{١ - س^{-١}} + \sqrt{١ + س^{-٢}}} = \frac{١ - ٠}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$$

تمــــــــــارين

أكمــــــل ما يأتى

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٣}{\text{س}} =$ ......

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} - ٥}} =$ ....

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٥} + ٥\,\text{س}^{٢}}{٣\,\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} + ٨} =$ ....

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٧}{\text{س}} + ٣ \right) =$ ....

(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(٣\,\text{س}^{-٢} + ٧\,\text{س}^{-١} - ٥ \right) =$ ....

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٠ (د) ∞

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٢}$ (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٠ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٣) $\lim\limits_{\text{ه} \to \infty} \frac{(\text{س} + ١)(٢\text{س} + ٣)}{٣\text{س}^{٢} + ٧\text{س}}$ (أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) صفر (د) $\frac{٢}{٧}$

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٧}}{\sqrt{٩\text{س}^{٢} + ٣}}$ (أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) $\frac{-٧}{٣}$ (ج) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4\text{س}^2 - 3}{5\text{س}^2 - 1}$	٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3\text{س}^2 + 4}{2 - \text{س}^2}$
٣	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5\text{س}^2 - 3\text{س} + 1}{2\text{س}^2 + \text{س} - 5}$	٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}{2 - 6\text{س} - \text{س}^2}$
٥	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^4 - \text{س}^3 - 4\text{س}}{3\text{س}^5 - \text{س}^2 + 7}$	٦	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3\text{س}^3 - 2}{4 - 3\text{س}^2}$
٧	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5\text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 3}{3\text{س}^4 - \text{س} + 7}$	٨	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^4 + 3\text{س} - 1}{6\text{س}^3 - \text{س}^2 + 7}$
٩	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 4}{(3\text{س} + 1)(2\text{س}^2 - 1)}$	١٠	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(7\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 5)}{(\text{س} + 4)(2\text{س}^2 - \text{س})}$
١١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2(\text{س} - 1)}{\text{س}(\text{س}^2 + 5\text{س} - 2)}$	١٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(2\text{س} + 5)(\text{س} - 1)(\text{س} + 3)}{\text{س}(\text{س} - 4)(3\text{س} + 1)}$
١٣	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{4\text{س}^2 + 7}}$	١٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{9\text{س}^2 - \text{س} - 1}}{2\text{س} + 3}$
١٥	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{27\text{س}^3 - 5\text{س} + 4}}{4\text{س}^2 - 3}$	١٦	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{25\text{س}^2 - 6}}{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - \text{س}}}$
١٧	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\text{س}^3 - 3\text{س} + 1}}{\sqrt[4]{16\text{س}^4 - 5}}$	١٨	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[7]{\text{س}^7 - \text{س}^5 + \text{س}}}{\sqrt[5]{\text{س}^5 - 3\text{س}}}$

١٩	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{٨\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٥}}{\sqrt[6]{\text{س}^{٤} - ٥}}$	٢٠	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{\text{س} + ٥}}{\sqrt{٢\text{س} + ٩}}$
٢١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٤} - ٢} - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}}{\text{س}^{٣} - ١}$	٢٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{٨ - ٢٧\text{س}^{٦}}}{\text{س} \quad ٤\text{س}^{٢} - ٧}$
٢٣	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٢\text{س}^{٣} + ١)^{٢} + ٦\text{س}^{٦}}{(٣\text{س}^{٣} - ١)^{٣} - ٧\text{س}^{٦}}$	٢٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١} - (٢\text{س} - ٣) \right)$
٢٥	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left[\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right]$	٢٦	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left[\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢} - \sqrt{\text{س}^{٢} - ١} \right]$
٢٧	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} - \sqrt{\text{س}^{٢} - ١} \right)$	٢٨	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}} - \sqrt{٤\text{س}^{٢} + \text{س}} \right)$
٢٩	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١} - \text{س} \right)$	٣٠	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤} - \text{س} \right)$
٣١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣\text{س}^{-٣} + ٢\text{س}^{-١} + ١}{\text{س}^{-٤} - ٥\text{س}^{-٥} + ٢}$	٣٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^{-٤} + ٣\text{س}^{-٢} - ٤}{\text{س}^{-٥} - ٦\text{س}^{-٣} - ٢}$
٣٣	أوجد قيمة ك إذا كان : ـ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\text{ك}\text{س}^{٣} + ٣\text{س}}}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٦}} = -١$	٣٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣ \times ٥^{\text{س}} + ٢ \times ٧^{\text{س}}}{٩ \times ٧^{\text{س}} - ٦ \times ٤^{\text{س}}}$

٣٥) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{أ}\text{س}^{٢} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{ب}\text{س} - ٥}$ وكانت $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = ٤$

، $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ٣$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب



الفصل الدراسى الأول

قانون الجيب

قانون جيب التمام

حل المثلث

(١) إذا علم قياسا زاويتين وطول ضلع

(٢) إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة

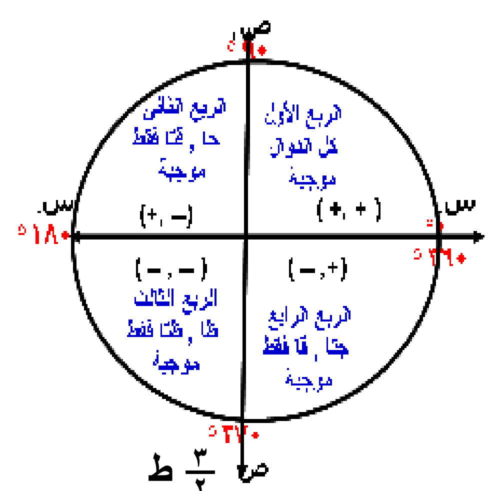
(٣) إذا علم أطوال أضلاعه الثلاثة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

مراجعة ما سبق دراسته

إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية



الربع	الزاوية هـ	إشارة جا ، قتا	إشارة جتا ، قا	إشارة ظا ، ظتا
الربع الأول	] ٠ ، ٩٠° [	+	+	+
الربع الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [	+	−	−
الربع الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [	−	−	+
الربع الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [	−	+	−

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدالة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
حا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	− ١	صفر
حتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	− ١	صفر	١
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية :-

[١] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين [هـ ، ٩٠° - هـ]

(١) حا هـ = حتا (٩٠° − هـ) ،،،، قتاهـ = قا(٩٠° − هـ)

(٢) حتا هـ = حا(٩٠° − هـ) ،،،، قا هـ = قتا (٩٠° − هـ)

(٣) ظا هـ = ظتا(٩٠° − هـ) ،،،، ظتا هـ = ظا (٩٠° − هـ)

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص

∴ س + ص = ٩٠° حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين موجبتين

[٢]العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ١٨٠° - هـ]

الزاوية (١٨٠° ــ هـ) تقع فى الربع الثانى (جا ، قتا) فقط موجبة

(١) حا (١٨٠° – هـ) = حا هـ

(٢) حتا (١٨٠° – هـ) = – حتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° – هـ) = – ظا هـ

[٣] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين[هـ ، ١٨٠° + هـ]

الزاوية (١٨٠ + هـ) تقع فى الربع الثالث (ظا ، ظتا) فقط موجبة

(١) حا (١٨٠° + هـ) = – حا هـ

(٢) حتا (١٨٠° + هـ) = – حتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

[٤] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين [هـ ، ٣٦٠° - هـ] أ، [هـ ، ـ هـ]

الزاوية (٣٦٠° ــ هـ) تقع فى الربع الرابع (جتا ، قا) فقط موجبة

(١)حا (٣٦٠° – هـ)= – حا هـ

(٢) حتا (٣٦٠° – هـ) = حتا هـ

(٣) ظا (٣٦٠° – هـ) = – ظا هـ

فمثلاً (١) جا ١٢٠° فى الربع الثانى = جا (١٨٠ ـ ٦٠) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

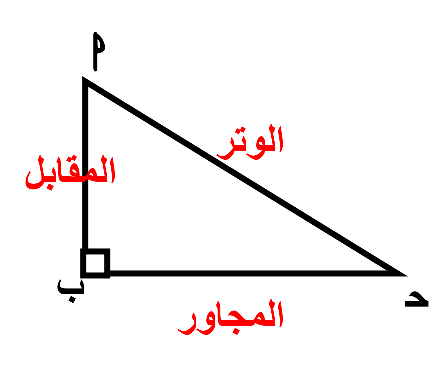
(٢) جتا ٢١٠° فى الربع الثالث = جتا (١٨٠ + ٣٠) = ـ جتا ٣٠° = ـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) ظا ١٥٠° فى الربع الثانى = ظا (١٨٠ ـ ٣٠) = ـ ظا ٣٠° = ـ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٤) قا ٣٠٠° فى الربع الرابع = قا (٣٦٠ ـ ٦٠) = قا ٦٠° = ٢

(٥) قتا (ـ ٦٠°) فى الربع الرابع = ـ قتا ٦٠° = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الدوال المثلثية للزوايا الحادة المرسومة فى Δ أ ب جـ قائم فى ب



يكون حا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$)   قتا جـ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}}$)

،، حتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$)   قا جـ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$)

،، ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$)   ظتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$)

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

*العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :

(١) حتا^{2}هـ + حا^{2}هـ = ١ ، ١ + ظا^{2}هـ = قا^{2}هـ ، ١ + ظتا^2 هـ = قتا^2 هـ

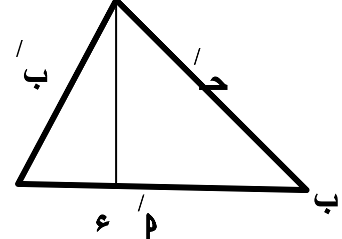
(٢) حا هـ قتا هـ = ١ ، حتا هـ قا هـ = ١ ، ظا هـ ظتا هـ = ١

(٣) ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :



$$\frac{ٲ'}{\text{جا } ٲ} = \frac{ب'}{\text{جا } ب} = \frac{جـ'}{\text{جا } حـ}$$

حيث الرموز : ٲ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث ٲ ب حـ

، ٲ/ ، ب/ ، حـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع ب حـ ، ٲ حـ ، ٲ ب على الترتيب

البرهان :

مساحة △ ٲ ب حـ = ½ × ب حـ × ٲ ء ،

∵ ٲ ء = حـ/ جا ب (من مساحة △ٲ ب ء)

∴ مساحة △ٲ ب حـ = ½ × ب/ جـ/ جا ٲ = ½ × ٲ/ جـ/ حاب = ½ × ٲ/ ب/ حا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على ٲ/ب/جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{ٲ'}{\text{جا } ٲ} = \frac{ب'}{\text{جا } ب} = \frac{جـ'}{\text{جا } حـ}$$

ملاحظات :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = ٲ/ + ب/ + جـ/

مساحة المثلث = ½ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = ½ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = ½ × ٲ/ ب/ جا جـ = ½ × ب/ جـ/ جا ٲ = ½ × ٲ/ جـ/ جاب

محيط الدائرة = ٢ ط نق & مساحة الدائرة = ط نق٢

أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث

أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثـ ١ـال : في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩/ = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°

فأوجد قيمة كل من ب/ ، جـ/ ومساحة المثلث ٩ ب جـ لأقرب رقم عشري

الحــــــــــل

∵ ق(∠٩) = ١٨٠° − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

∴ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٧٥} = \frac{ب/}{جا ٤٥} = \frac{جـ/}{جا ٦٠}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times جا ٤٥}{جا ٧٥}$ = ٧,٤ سم

، جـ/ = $\frac{١٠ \times جا ٦٠}{جا ٧٥}$ = ٩ سم

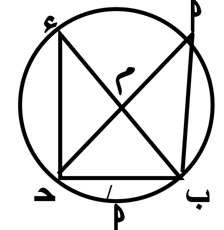
، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا/ ب/ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧,٤ × جا ٦٠° = ٣٢ سم^{٢}

تمرين مشهور

في أي مثلث ٩ ب جـ يكون :



∴ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{جـ/}{حا حـ}$ = ٢ نق



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

البرهان :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس ∆ ٩ ب حـ

ثم نرسم القطر ب ء ، الوتر حـ ء

فيكون : ق(∠ب حـ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "

، ق(∠٩) = ق(∠ء) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

فى ∆ ء ب حـ : حا ء = $\frac{٩/}{ب ء}$ = $\frac{٩/}{٢ نق}$ ∴ حا ٩ = $\frac{٩/}{٢ نق}$

∴ $\frac{٩/}{حا ٩}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩/}{حا ٩} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ = ٢ نق

نتائج هامة

٩/ = ٢ نق جا ٩ & ب/ = ٢ نق جاب & جـ/ = ٢ نق جا جـ

جا ا = $\frac{٩/}{٢ نق}$ & جا ب = $\frac{ب/}{٢ نق}$ & جا جـ = $\frac{حـ/}{٢ نق}$

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

مثـــ٢ ــال: في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩/ = ١٠سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

الحـــــــــــــــل

∵ ق(∠٩) = ١٨٠ − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ} = ٢ نق$

∴ $\frac{١٠}{جا ٧٥} = \frac{ب/}{جا ٤٥} = \frac{جـ/}{جا ٦٠} = ٢ نق$

∴ ٢ نق = $\frac{١٠}{جا ٧٥}$ = ١٠٫٣ سم   ∴ نق = ٥٫٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥٫٢ = ٣٢٫٥ سم

مثـ٣ـــال: إذا كان مقاييس زوايا مثلث تتناسب مع ١ : ٢ : ٣ فأثبت أن أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتناسب مع ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

الحـــــــــــــــل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠٩) = ١٨٠ × $\frac{١}{٦}$ = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ × $\frac{٢}{٦}$ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ × $\frac{٣}{٦}$ = ٩٠°

∵ $\frac{٩/}{جا ٩} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$

∴ ٩/ : ب/ : جـ/ = جا ٩ : جا ب : جاجـ = جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: ١ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

مثـ٤ ـال: ل م ن مثلث فيه كان ، ق(∠ل) = ٥٢َ ٣٨ْ ، ق(∠ن) = ١٧َ ٤٤ْ

مَ = ٣٥٢,٧ فأوجد م ن ،، ل م

الحـــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ْ − (٥٢َ ٣٨ْ + ١٧َ ٤٤ْ) = ٥١َ ٩٦ْ

∴ $\frac{مَ}{جا م} = \frac{لَ}{جا ل} = \frac{نَ}{جا ن}$

∴ $\frac{٣٥٢,٧}{جا ٥١َ ٩٦ْ} = \frac{لَ}{جا ٥٢َ ٣٨ْ} = \frac{نَ}{جا ١٧َ ٤٤ْ}$

∴ م ن = لَ = $\frac{٣٥٢,٧ \times جا ٥٢َ ٣٨ْ}{جا ٥١َ ٩٦ْ}$ = ٢٢٢,٩

∴ ل م = نَ = $\frac{٣٥٢,٧ \times جا ١٧َ ٤٤ْ}{جا ٥١َ ٩٦ْ}$ = ٢٤٨

مثـ٥ ـال: إذا رمزنا لمساحة سطح المثلث ا ب جـ بالرمز Δ فأثبت أن

Δ = $\frac{اَ بَ جـَ}{٤ نق}$ = ٢ نق٢ جا ا جا ب جا حـ حيث : نق طول نصف قطر الدائرة

الحـــــــل

∵ Δ = $\frac{١}{٢}$ بَ جـَ جا ا ∵ $\frac{اَ}{جا ا}$ = ٢ نق ∴ جا ا = $\frac{اَ}{٢ نق}$

∴ Δ = $\frac{١}{٢}$ بَ جـَ $\frac{اَ}{٢ نق}$ = $\frac{اَ بَ جـَ}{٤ نق}$ [١]

∵ $\frac{بَ}{حا ب} = \frac{جـَ}{حا جـ}$ = ٢ نق ∴ بَ = ٢ نق حاب ، جـَ = ٢ نق حاجـ

∴ Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق حا ب × ٢ نق جا جـ × جا ا = ٢ نق٢ حا ب جا جـ جا ا

مثـ٦ ـال: ا ب حـ مثلث فيه حا ا : جا ب : جا جـ = ٩ : ٢ : ٤

أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٤٥ سم

الحـــــــل

∵ $\frac{اَ}{جا ا} = \frac{بَ}{حا ب} = \frac{جـَ}{حا حـ}$ = م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = م$ ∴ أ' = ٩ م ، ب' = ٢ م ، جـ' = ٤ م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{٩ + ٢ + ٤} = م$ ، حيث $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = أحدى النسب

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

∴ أ' = ٩ × ٣ = ٢٧ سم

ب' = ٢ × ٣ = ٦ سم

جـ' = ٤ × ٣ = ١٢ سم

تمـــــــــارين

١ – ل م ن مثلث فيه ل' = ٢٤ سم ، ق(∠ ل) = ٣٧° ، ق(∠ م) = ١٠٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد كل من ن' ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – أ ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٠ سم ، ق(∠ ب) = ٣٠° ، ق(∠ جـ) = ٨٠° أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٣ – Δ أ ب حـ فيه ق(∠ أ) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

٤ – Δأ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق (∠ ب) = ٤٠° ؛ ق (∠ حـ) = ٧٥° أوجد طول كلا من ب' ؛ أ ب قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٥ – أ ب حـ فيه أ' = ١٠سم ؛ ق(∠ ب) = ٥٥° ؛ ق(∠ حـ) = ٤٠° أوجد طول كلا من حـ' ؛ مساحة (Δ أ ب حـ) ؛ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٦ – Δ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ ب) = ١٢° ٤٦' ؛ ق(∠ حـ) = ١٨° ٧٤' أوجد طول ب لأقرب رقمين عشريين ؛ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب سم٢

٧ – Δ س ص ع فيه ص' = ١٠سم ؛ ق(∠ ص) = ١٠٠° ؛ ق(∠ ع) = ٣٢° أوجد كلا من مساحة (Δ س ص ع) لأقرب سم٢ ؛ محيط Δ س ص ع لأقرب سم

٨ – Δ أ ب حـ فيه حـ' = ١٩سم ؛ ق(∠ أ) = ١١٢° ؛ ق(∠ ب) = ٣٣° أوجد طول كلا من ب

لأقرب سم ؛ نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث لأقرب رقمين عشريين

٩ ـ Δ ٦ ب حـ فيه ق(∠ ٦) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

١٠ ـ Δ٦ ب حـ فيه ٦/ = ١٢ سم ؛ ٦ حـ = ١٠سم ؛ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٧سم أوجد طول حـ/ لأقرب سم حيث Δ ٦ ب حـ حاد الزوايا

١١ ـ Δ ٦ ب حـ فيه حا حـ = ٢, ٠ ؛ حـ/ = ١٤سم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه

١٢ ـ Δ ٦ ب حـ فيه ٦/ = ٥سم ؛ ق (∠ب) = ١٢٠° ؛ مساحة (Δ٦ ب حـ) = ١٠ $\sqrt{3}$ سم٢ أوجد حـ/

١٣ ـ دائرة محيطها ٤٤سم تمر برؤوس Δ ٦ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٦) = ٦٠° أوجد ٦/

١٤ ـ دائرة مساحة سطحها ١٥٤سم٢ تمر برؤوس Δ ٦ ب حـ الذي فيه ٦ ب = ب حـ ؛ ق (> ب) = ٧٠° أوجد ٦/

١٥ ـ دائرة طول نصف قطرها ١٠سم تمر برؤوس Δ ٦ ب حـ الذي فيه ق (∠ ٦) = ٢٧° ؛ ق (∠حـ) = ٥٢° أوجد محيط Δ٦ ب حـ

١٦ ـ Δ ٦ ب حـ فيه ق (∠ ٦) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ : ٣ : ٥ فإذا كان ٦/ = ١٨,٣ سم أوجد محيط Δ ٦ ب حـ لأقرب سم

١٧ ـ Δ س ص ع فيه ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ١ : ٢ : ٣ إثبت أن : س/٢ : ص/٢ : ع/٢ = ١ : ٣ : ٤

١٨ ـ Δ ٦ ب حـ فيه ٦/ = ٨ سم إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٦ ب حـ) = $\frac{\text{٢ب/ حـ/}}{\text{نق}}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ٦ ب حـ

١٩ ـ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق (∠ ع) = ٣٠° إثبت أن مساحته = $\sqrt{3}$ نق

٢٠ ـ في Δ ٦ ب حـ إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٦ ب حـ) = ٢ نق٢ حا ٦ حاب حا حـ

٢١ – Δ ٢ ب حـ محيطه ١٦سم ؛ ق (∠ ٢) = ٥٠° ؛ ق (∠ ب) =٥٦° أوجد ب/ ، حـ/

٢٢ – Δ ٢ ب حـ محيطه ١٢ سم ؛ ق (∠ ٢) =٤٧° ؛ ق (∠ ب) = ٥٣° أوجد ب/

٢٣ – Δ ٢ ب حـ فيه ب حـ = ٥٥سم ، ق (∠ حـ) =٢٧° ، ق (∠ ٢) = ٢٩° أوجد طول مسقط ٢ ب علي ب حـ ؛ طول العمود المرسوم من ٢ علي ب حـ لأقرب سم

٢٤ – Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٠سم ، ق (∠ ب) =٥٠° ، ق (∠ حـ) =٦٠° أوجد طول كلا من نصفي قطري الدائرتين الخارجة والداخلة للمثلث ٢ ب حـ

٢٥ – ٢ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ب ٢ = ١٨سم ؛ ق (∠ حـ ٢ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب ٢) = ٤٤° أوجد طول قطره ٢ حـ ؛ مساحة سطح متوازي الأضلاع ٢ ب حـ ء لأقرب وحدة

٢٦ – ٢ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٢ حـ = ٢٠ سم ؛ ق (∠ ب ٢ م) =٣٨° حيث م نقطة تقاطع قطريه؛ ق (∠ ٢ ب م) =٦٢ أوجد طول كلا من ٢ ب ؛ ب ء

٢٧ – ٢ ب حـ ء شبه منحرف فيه ٢ ء // ب حـ ؛ ٢ ء = ١٥ سم ؛ ق (∠ ء) =١٠٠° ؛ ق (∠ ب) = ٦٥° ؛ ق (∠ ٢ حـ ب) =٣٢° أوجد طول كلا من ٢ جـ ، ب حـ لأقرب سم ، مساحة سطح شبه المنحرف ٢ ب حـ ء لأقرب سم؟

٢٨ – ٢ ب حـ ء شكل رباعي دائري حيث ٢ ب قطر الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها ٧سم ، ق (∠ حـ ٢ ب) =٢٠° ، ق (∠ ٢ ب ء) =٤٠° أوجد مساحة سطح الشكل ٢ ب حـ ء

٢٩ – ٢ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨سم أوجد طول قطره لأقرب سم

٣٠ – ٢ ب جـ متساوي الساقين فيه ق (∠ ٢) = ١٢٠° ،وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد ب/ ، ثم استنتج مساحة المثلث لأقرب سم؟

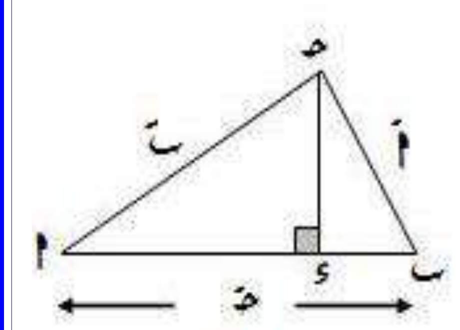
قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

في ∆ ﻡ ب حـ يكون :

ﻡ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻡ

ب/٢ = ﻡ/٢ + حـ/٢ – ٢ ﻡ/ حـ/ حتا ب

حـ/٢ = ﻡ/٢ + ب/٢ – ٢ ﻡ/ ب/ حتا حـ



البرهــــــــــان

∵ ∆ حـ ء ب قائم الزاوية فى ء

∴ ﻡ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ب)٢ ، ∵ ء ب = ب ﻡ – ء ﻡ

∴ ﻡ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ب ﻡ – ء ﻡ)٢

= (ء حـ)٢ + (ب ﻡ)٢ + (ء ﻡ)٢ – ٢ ب ﻡ × ء ﻡ

، ∵ ∆ حـ ء ﻡ قائم الزاوية فى ء ∴ (حـ ﻡ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ﻡ)٢

، حتا ﻡ = ء ﻡ / حـ ﻡ ∴ ء ﻡ = حـ ﻡ حتا ﻡ

∴ ﻡ/٢ = (حـ ﻡ)٢ + (ب ﻡ)٢ – ٢ حـ ﻡ × ب ﻡ حتا ﻡ

∴ ﻡ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻡ

إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها		إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما
حتا ﻡ = (ب/٢ + حـ/٢ – ﻡ/٢) / (٢ ب/ حـ/)	ومنها	• ﻡ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ – ٢ ب/ حـ/ حتا ﻡ
حتا ب = (ﻡ/٢ + حـ/٢ – ب/٢) / (٢ ﻡ/ حـ/)	ومنها	• ب/٢ = ﻡ/٢ + حـ/٢ – ٢ ﻡ/ حـ/ حتا ب
حتا حـ = (ﻡ/٢ + ب/٢ – حـ/٢) / (٢ ﻡ/ ب/)	ومنها	• حـ/٢ = ﻡ/٢ + ب/٢ – ٢ ﻡ/ ب/ حتا حـ

ملاحظات :

- لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية فإذا كانت حتا ﻡ موجبة كانت ∠ﻡ حادة
  أما إذا كانت حتا ﻡ سالبة كانت ∠ ﻡ منفرجة

- أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً
- إذا كان : ٵ/ : ب/ : حـ/ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن: ٵ/ = ٣ ل، ب/ = ٤ ل ، حـ/ = ٥ ل ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ ٵ ب حـ

مثـــ١ـــال : مثلث ٵ ب حـ فيه ٵ/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠حـ) =٨٧° أوجد جـ/ لأقرب سم

الحـــــــــــل

حـ/٢ = ٵ/٢ + ب/٢ – ٢ ٵ/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

= ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم

مثـــ٢ـــال : أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ٵ ب جـ الذي فيه ٵ/ = ٣سم ، ب/ = ٥ سم ، جـ/ = ٧ سم

الحـــــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$$\text{حتا حـ} = \frac{ٵ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢\ ٵ/\ ب/} = \frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ \times ٣ \times ٥} = -\frac{١}{٢}$$

∴ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

مثـــ٣ـــال : مثلث ٵ ب حـ فيه $\frac{١}{٢}$ جا ٵ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ أحسب ق(∠جـ) ؟

الحـــــــــــل

$$∵ \frac{\text{جا ٵ}}{٢} = \frac{\text{حا ب}}{٣} = \frac{\text{حا جـ}}{٤} \quad ، \quad ∵ \frac{ٵ/}{\text{جا ٵ}} = \frac{ب/}{\text{حا ب}} = \frac{جـ/}{\text{حا جـ}}$$

$$∴ \frac{ٵ/}{٢} = \frac{ب/}{٣} = \frac{جـ/}{٤} = م$$ ∴ ٵ/ = ٢ م ، ب/ = ٣ م ، جـ/ = ٤ م

$$∵ \text{حتا حـ} = \frac{ٵ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢\ ٵ/\ ب/} = \frac{٤م^٢ + ٩م^٢ - ١٦م^٢}{٢ \times ٢م \times ٣م} = \frac{-٣م^٢}{١٢م^٢}$$

∴ جتا جـ = $-\frac{١}{٤}$ (سالبة) ∴ الزاوية جـ منفرجة وبإستخدام حاسبة الجيب

∴ ق(∠ جـ) = ١٠٤° ٢٨ /

مثـــ٤ـال : إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما $\sqrt{٣} + ١$ ، $\sqrt{٣} - ١$ والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد بدون الحاسبة طول الضلع الثالث

الحـــــــــل

بفرض أن : م/ = $\sqrt{٣} + ١$ ، ب/ = $\sqrt{٣} - ١$ ، ق(∠ جـ) = ١٢٠°

∵ حـ/² = م/² + ب/² − ٢ م/ ب/ حتا حـ

= $(\sqrt{٣}+١)^٢ + (\sqrt{٣}-١)^٢ - ٢ \times (\sqrt{٣}+١)(\sqrt{٣}-١) \times$ حتا ١٢٠°

= $٤ + ٢\sqrt{٣} + ٤ - ٢\sqrt{٣} - ٤ \times (-\frac{١}{٢}) = ١٠$

∴ جـ/² = ١٠   ∴ طول الضلع الثالث = جـ/ = $\sqrt{١٠}$

مثــ٥ـال : مثلث م ب حـ فيه م/ = ٥سم ، مساحة سطحه = $١٠\sqrt{٣}$ سم² ، ق(∠ ب) = ١٢٠° أوجد جـ/ ، ب/ لأقرب سم ثم أوجد ق(∠ م)

الحـــــــــل

∵ مساحة سطح Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ م/ جـ/ جا ب

$١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـ/ × جا ١٢٠°

∴ $١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـ/ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جـ/ = $١٠\sqrt{٣} \div \frac{٥\sqrt{٣}}{٤}$ = ٨ سم

∵ ب/² = م/² + جـ/² − ٢ م/ جـ/ حتا ب

ب/² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ × حتا ١٢٠°

ب/² = ١٢٩   ∴ ب/ = $\sqrt{١٢٩}$ = ١١٫٣٦ سم

∵ ∠ ب منفرجة   ∴ ∠ م حادة

∵ $\frac{م/}{جا م} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٥}{جا م} = \frac{١١٫٣٦}{جا ١٢٠°}$

∴ جا م = $\frac{٥ \times جا ١٢٠°}{١١٫٣٦}$ بإستخدام الحاسبة ∴ ق(∠ م) = ٢٢° ٢٤/

مثـــ٦ـال : في المثلث ٩ ب جـ فيه ٩/ = ١٥سم ، ب/ = ٢٥ سم ، جـ/ = ٣٥ سم
أثبت أن جـ هى قياس أكبر زاوية فى المثلث وأنها تحقق العلاقة :
جتا حـ ـ ٥ $\sqrt{٣}$ جا جـ + ٨ = صفر

الحـــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$$\text{جتا حـ} = \frac{٩^{/٢} + ب^{/٢} - حـ^{/٢}}{٢\ ٩/\ ب/} = \frac{(١٥)^٢ + (٢٥)^٢ - (٣٥)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٢٥} = -\frac{١}{٢}$$

∴ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

∴ الطرف الأيمن = جتا ١٢٠° ـ ٥ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٨

$$= \frac{-١}{٢} - ٥\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ = -٠,٥ - ٧,٥ + ٨ = \text{صفر}$$

تمـــــــــارين

١ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٣سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد ق (∠ ٩)

٢ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٧سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد قياس أصغر زواياه

٣ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٣سم ، حـ/ = ١٠سم أوجد ق (∠ ٩) ثم أحسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم

٤ – Δ س ص ع فيه س/ = ١٥سم ، ص/ = ١٢ سم ، ق (∠ ع) = ٨٧° أوجد ع/ لأقرب سم

٥ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٠سم ، ب/ = ١٦سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد حـ/ لأقرب سم
ثم أحسب مساحة (Δ ٩ ب حـ) لأقرب سم^٢

٦ – Δ ٩ ب حـ فيه جتا ٩ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب/ = ١٦سم ، حـ/ = ١٢ سم إثبت أنه متساوي الساقين

٧ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ : ب/ : حـ/ = ١: ٣ : ١ أوجد قياس أكبر زواياه

٨ – Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ٢ ب/ جتا حـ إثبت أن Δ ٩ ب حـ متساوي الساقين

٩ – Δ س ص ع فيه ص ع = ١٤سم ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، مساحة (Δ س ص ع) = ٤٩ $\sqrt{٣}$ سم
أوجد محيط Δ س ص ع لأقرب سم

١٠ – Δ س ص ع فيه س/ = ٤سم ، ص/ = ٥سم ، ع/ = ٦سم أوجد طول العمود المرسوم من رأس اكبر زاوية للمثلث علي الضلع المقابل لأقرب رقم عشري

١١– Δ س ص ع أوجد قياس أكبر زواياه إذا علم أن أطوال ارتفاعاته هي ١٢ سم ، ١٥سم ، ٢٠ سم

١٢ – Δ ﺃ ب حـ فيه ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٢٩°، ق (∠ حـ) = ٣٧°، ء منتصف ب حـ
أوجد طول كلا من ﺃ ب ، ﺃ ء لأقرب رقم عشري

١٣ – Δ س ص ع فيه ٤حاس = ٣حاص = ٢ حا ع أوجد قياس أكبر زواياه

١٤ – Δ س ص ع فيه ق(∠ ص) = ٦٠° ، س/ = ٢ ع/ أوجد ق (∠ ع) ، ق (∠ س)

١٥ – Δ ﺃ ب حـ فيه ب/٢ = (حـ/ - ﺃ/)٢ + حـ/ ﺃ/ أوجد ق (∠ ب)

١٦ – ﺃ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﺃ حـ = ١٦سم ، ب ء = ٢٠سم ، ق (∠ ﺃ م ب) = ٥٤°
حيث م نقطة تقاطع القطرين أوجد طول ﺃ ء لأقرب سم

١٧ – ﺃ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﺃ ب = ١٦سم ، ب ء = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٨سم أوجد
طـول ﺃ حـ لأقرب رقم عشري ، ق (∠ ب ﺃ حـ)

١٨ – ﺃ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ﺃ ب = ٨ سم ، ب ء = ٩ سم ، ب حـ = ١١ سم أوجد
طـول ﺃ حـ لأقرب سم ، مساحة متوازي الأضلاع ﺃ ب حـ ء لأقرب سم٢

١٩ – ﺃ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﺃ ب = ١٨سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ١٦ سم ،
ء ﺃ = ١٨سم ، ﺃ حـ = ٢٢ سم إثبت أن الشكل ﺃ ب جـ ء رباعي دائري

٢٠ – ﺃ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﺃ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، ء حـ = ٥ سم ، ء ب =٨ سم
، ﺃ حـ = ٨ سم إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٢١ – ﺃ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ق (∠ ب) = ١٢٠° ، محيطه = ١٦سم ، طـول القطر الأكبر
= ٧ سم أوجد طول كلا من ﺃ ب ، ب حـ لأقرب سم

٢٢ – ﺃ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﺃ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ﺃ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠°، ق (> ء حـ ب) = ٣٠° أوجد طول ﺃ حـ لأقرب سم

٢٣ – ﺃ ب حـ ء شكل رباعي فيه ﺃ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ﺃ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٦٥° ، ق (∠ ﺃ ب ء) = ٥٠° أوجد ق (> ب حـ ء)

٢٤ – Δ س ص ع فيه ء منتصف س ص إثبت أن : (ع س)٢ + (ع ص)٢ = ٢ (ع ء)٢ + ٢ (س ء)٢

٢٥ – ﺃ ب حـ ء متوازي أضلاع إثبت أن : (ﺃ حـ)٢ + (ب ء)٢ = ٢ (ﺃ ب)٢ + ٢ (ب حـ)٢

٢٦ – ﺃ ب حـ فيه ء منتصف ب حـ ، حـ/ = ٥سم ، ب/ = ٦سم ، ﺃ ء = ٤.٣سم أوجد ﺃ/ لأقرب سم

حـــل المثلث

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

يستخدم قانون الجيب فى حل المثلث متى علم قياسا زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

فمثلاً فى ∆ أ ب حـ إذا علم : ق (∠أ) ، ق(∠ب) ، أ/

فيمكن إيجاد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° – [ق (∠أ) + ق(∠ب)]

ومن قانون الجيب $\frac{أ/}{حا\ أ} = \frac{ب/}{حا\ ب} = \frac{حـ/}{حا\ حـ}$ لإيجاد كلا من : ب/ ، حـ/

حيث : ب/ = $\frac{أ/ \times حاب}{جا\ أ}$ ،،،، جـ/ = $\frac{أ/ \times حاجـ}{جا\ أ}$

مثـ ١ ـال: حل ∆ أ ب حـ الذى فيه ق (∠أ) = ٤٥° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، أ/ = ١٠سم

الحـــــــــــــل

∵ ق (∠حـ) = ١٨٠° – (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥° (١)

∴ $\frac{أ/}{حا\ أ} = \frac{ب/}{حا\ ب} = \frac{حـ/}{حا\ حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{حا٧٥°} = \frac{ب/}{حا\ ٤٥°} = \frac{حـ/}{حا\ ٦٠°}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times حا}{٤٥°}$ = ٧,٤ سم (٢)

، جـ/ = $\frac{١٠ \times حا٦٠°}{جا\ ٧٥°}$ = ٩ سم (٣)

مثـ ٢ ـال: حل ∆ أ ب حـ الذى فيه ق (∠أ) = ٢٠/ ٤١° ، ق(∠ب) = ١٧/ ٥٩° ، أ/ = ٥,٦١٤ سم

الحـــــــــــــل

∵ ق (∠حـ) = ١٨٠° – (٢٠/ ٤١° + ١٧/ ٥٩°) = ٢٣/ ٧٩° (١)

∵ $\frac{أ/}{حا\ أ} = \frac{ب/}{حا\ ب} = \frac{حـ/}{حا\ حـ}$ ∴ $\frac{٥,٦٤١}{حا٢٠\ ٤١} = \frac{ب/}{حا\ ١٧\ ٥٩} = \frac{حـ/}{حا٢٣\ ٧٩}$

∴ ب/ = (٥,٦٤١ × جا ١٧/ ٥٩°) ÷ (جا ٢٠/ ٤١°) = ٧,٣١ سم (٢)

، جـ/ = (٥,٦٤١ × جا ٢٣/ ٧٩°) ÷ (جا ٢٠/ ٤١°) = ٨,٣٥ سم (٣)

مثـ٣ ـال: حل Δ ل م ن فيه ، ق(∠ل) = ٥٢/ ٣٨° ، ق(∠ن) = ١٧/ ٤٤° ، م/ = ٣٥٢,٧

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠° − (٥٢/ ٣٨° + ١٧/ ٤٤°) = ٥١/ ٩٦° (١)

∴ م/ ÷ جا م = ل/ ÷ جا ل = ن/ ÷ جا ن

∴ ٣٥٢,٧ ÷ جا ٥١/ ٩٦° = ل/ ÷ جا ٥٢/ ٣٨° = ن/ ÷ جا ١٧/ ٤٤°

∴ ل/ = (٣٥٢,٧ × جا ٥٢/ ٣٨°) ÷ (جا ٥١/ ٩٦°) = ٢٢٢,٩ (٢)

∴ ن/ = (٣٥٢,٧ × جا ١٧/ ٤٤°) ÷ (جا ٥١/ ٩٦°) = ٢٤٨ (٣)

تمـــــــارين

١ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه أ/ = ١٦سم ، ق (∠ب) = ٥٥° ، ق (∠جـ) = ٨٠°

٢ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه أ/ = ١٠سم ، ق (∠ب) = ٦٢° ، ق (∠جـ) = ٤٨°

٣ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه ب/ = ٢٣ سم ، جـ/ = ٣٧سم ، ق (∠أ) = ٦٠°

٤ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه أ/ = ١٦سم ، ب/ = ٢٥ سم ، ق (∠جـ) = ٣٠/ ١٠٤°

٥ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه أ ب = أ جـ ، ق(∠أ) = ٨٠° ، مساحة سطح الدائرة الخارجة عنه = ١٥٤سم²

٦ – حل Δ أ ب جـ الذي فيه أ/ = ٤ سم ، ق (∠أ) = ٢ ق (∠ب) = ٦٠°
ثم أوجد مساحته

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

ليكن معلوم فى Δ ب حـ طولا ا/ ، ب/ ، ق(∠حـ)

لذلك نطبق قانون جيب التمام : حـ/٢ = ا/٢ + ب/٢ – ٢ ا/ ب/ حتا حـ

ومنه نوجد ق (∠ا) حيث : حتا ا = (ب/٢ + حـ/٢ – ا/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/)

ثم نوجد ق(∠ب) حيث : ق(∠ب) = ١٨٠° – [ق (∠ا) + ق(∠حـ)]

مثـال ١ : حل Δ ا ب حـ الذى فيه ا/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ٨٧°

الحــــــــل

حـ/٢ = ا/٢ + ب/٢ – ٢ ا/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

∴ حـ/٢ = ٣٧٤ ∴ حـ/ = √٣٧٤ = ١٩ سم (١)

حتا ا = (ب/٢ + حـ/٢ – ا/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/) = (١٥٢ + ١٩٢ – ١٣٢) ÷ (٢ × ١٥ × ١٩) ≈ ٠,٧٣١٥

∴ ق (∠ا) = ٤٢ /٥٩° (٢)

، ق(∠ب) = ١٨٠° – [٨٧° + ٤٢ /٥٩°] = ٥٠° (٣)

مثـال ٢ : حل Δ ا ب حـ الذى فيه ا/ = ٨٠ ، ب/ = ٥٠° ، ق(∠جـ) = ٢/ ٦٠°

الحــــــــل

حـ/٢ = ا/٢ + ب/٢ – ٢ ا/ ب/ حتا حـ

= (٨٠)٢ + (٥٠)٢ – ٢ × ٨٠ × ٥٠ × حتا ٢/ ٦٠°

∴ حـ/٢ = ٤٩٦٤ ∴ حـ/ = √٤٩٦٤ = ٧٠,٤٥٥٧ (١)

وبتطبيق قانون الجيب (ب/ ÷ جا ب) = (جـ/ ÷ جا جـ) ∴ (٥٠ ÷ جا ب) = (٧٠,٤٦ ÷ جا ٢/ ٦٠°)

∴ جا ب = $\frac{٥٠ \times جا ٢ ^{/} ٦٠^{\circ}}{٧٠,٤٦}$ ∴ ق(∠ب) = ٥٦ ^{/} ٣٧° (٢)

∴ ق (∠ؘ) = ١٨٠° – [٥٦ ٣٧° + ٢ ٦٠°] = ٢ ^{/} ٨٢° (٣)

مثـال ٣ : حل ∆ س ص ع الذى فيه س^{/} = ١٦، ص^{/} = ٢٥ ، ق(∠ع) = ٣٠ ^{/} ١٠٤°

الحـــــــــــل

ع^{/٢} = س^{/٢} + ص^{/٢} – ٢ س^{/} ص^{/} حتا ع

= (١٦)^{٢} + (٢٥)^{٢} – ٢ × ١٦ × ٢٥ × حتا ٣٠ ١٠٤°

∴ ع^{/٢} = ١٠٨١,٣٢ ∴ ع^{/} = $\sqrt{١٠٨١,٣٢}$ = ٣٢,٨٨ (١)

حتا س = $\frac{ص^{/٢} + ع^{/٢} - س^{/٢}}{٢ ص^{/} ع^{/}}$ = $\frac{٢٥^{٢} + ٣٢,٩^{٢} - ١٦}{٢ \times ٢٥ \times ٣٢,٩}$ ≈ ٠.٨٨٢٣

∴ ق (∠س) = ٦ ^{/} ٢٨°

، ق(∠ص) = ١٨٠° – [٦ ^{/} ٢٨° + ٣٠ ^{/} ١٠٤°] = ٢٤ ^{/} ٤٧°

تمـــــــارين

١ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ؘ^{/} = ٢٥,٣ سم ، حـ^{/} = ١٤,٧ سم ، ق (∠ب) = ١,٢ ^{ء}

٢ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ؘ ب = ٤٨,٥ سم ، ب حـ = ٤٦ سم ، حتا ب = – ٠,٦

٣ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ب حـ = ٣٦ سم ، ؘ ب = ٣٠ سم ، ق (∠ب) = ١٠ ^{/} ٧٨°

ثم أوجد الإرتفاع المرسوم من ب على $\overline{ؘ حـ}$

٤ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ؘ^{/} = ٢١ سم ، حتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، طا حـ = $\frac{٧}{٢٤}$.

٥ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ؘ^{/} = ١٣ سم ، ق (∠ؘ) = ٦٠° ومحيطه ٣٥ سم

٦ – حل ∆ ؘ ب حـ الذي فيه ؘ^{/} = ١٣ سم ، ق (∠ؘ) = ٢٤° ، طول قطر الدائرة المارة

بروؤسه يساوى ٨ سم

الحالة الثالثة : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى ∆ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب/ ، حـ/ نوجد

أولاً : نوجد ق (∠أ) حيث : $\text{حتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{أ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ حـ}'}$

ثانياً : نوجد ق(∠ب) حيث : $\text{حتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ حـ}'}$

ثالثاً : نوجد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° − [ق (∠أ) + ق(∠ب)]

مثـــال ١ : حل ∆ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧ سم ، حـ/ = ١١ سم

الحــــــــــــل

$\text{حتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{أ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ حـ}'} = \frac{٧^2 + ١١^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ١١}$ ∴ ق (∠أ) = ١٩° ٤١/

$\text{حتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ حـ}'} = \frac{٥^2 + ١١^2 - ٧^2}{٢ \times ٥ \times ١١}$ ∴ ق (∠ب) = ٢٨° ٨/

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [١٩° ٤١/ + ٢٨° ٨/] = ١٣٢° ١١/

مثـــال ٢ : حل ∆ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٨ سم ، ب/ = ٥ سم ، حـ/ = ٧ سم

الحــــــــــــل

$\text{حتا ب} = \frac{\text{حـ}'^2 + \text{أ}'^2 - \text{ب}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ حـ}'} = \frac{٧^2 + ٨^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ٨}$ ∴ ق (∠ب) = ٣٨° ١٣/

$\text{حتا جـ} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ حـ}'} = \frac{٨^2 + ٥^2 - ٧^2}{٢ \times ٨ \times ٥}$ ∴ ق (∠جـ) = ٦٠°

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [٣٨° ١٣/ + ٦٠°] = ٨١° ٤٧/

تمـــــــــارين

١ – حل Δ ٯ ب حـ الذي فيه ٯ/ = ٨ سم ، ب/ = ٥ سم ، حـ/ = ٧ سم

٢ – حل Δ ٯ ب حـ الذي فيه ٯ/ = ٦ سم ، ب/ = ٩ سم ، حـ/ = ٥ سم

٣ – حل Δ ٯ ب حـ الذي فيه ٯ ب : ب حـ : ٯ حـ = ٤ : ٥ : ٧ ومحيطه ٤٨ سم